Chap 9 : Intégrales à paramètre

X sera un espace métrique, I un intervalle de $\mathbb{R}$

On cherche à étudier $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ x est le paramètre, t la variable d'intégration

I. Continuité

$f : X \times I \to \mathbb{C}$ Supposons : $\begin{cases} \forall x \in X, t \mapsto f(x,t) \text{ est } \mathcal{C}_{pm} \\ \forall t \in I, x \mapsto f(x,t) \text{ est continu} \\ \exists \varphi \in L^1(I) \text{ tq } \forall (x,t) \in X \times I, |f(x,t)| \leq \varphi(t) \end{cases}$

Alors $F : \begin{cases} X \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_I f(x,t)dt \end{cases}$ est définie et continue sur X

On est généralement amené à remplacer X par un voisinage de a pour la 3^e condition

$^{(I)}$Si X est localement compact ($\exists$ vois compact d'un pt), $I = [a,b]$ segment de $\mathbb{R}$,

et $f : X \times I \to \mathbb{C}$ globalement continue, alors $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est continue sur X

/!\ Les continuités partielles ne suffisent pas dans ce cas

II. Dérivabilité

I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{C}$ telle que :

– $f(\bullet,t)$ est $\mathcal{C}^1$ et $f(x,\bullet)$ est $\mathcal{C}_{pm}$ – $\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet,t)$ est $\mathcal{C}^0$ et $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(x,\bullet)$ est $\mathcal{C}_{pm}$

– $\forall x \in I$, $f(x,\bullet)$ est intégrable sur J – $\exists \varphi \in L^1(J)$, $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$

Alors pour tout $x \in I$, $F : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

f réelle. $(x_n) \to a$. $\frac{F(x_n)-F(a)}{x_n - a} = \int_J \frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}dt$ EAF : $\exists c_n, \left|\frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(c_n,t)\right| \leq \varphi(t) + CVD$

Si J est un segment et f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $I \times J$, il n'y a pas à vérifier la dernière hypothèse

Pratique : on vérifie : régularité de f, $\frac{\partial f}{\partial x}$; intégrabilité de $f(x,\bullet)$; domination de $\frac{\partial f}{\partial x}$ (localisation)

III. Méthode d'étude des intégrales à paramètre

A – Régularité (domination)

B – Calcul de la dérivée (Intégration directe par décomposition d'une fraction rationnelle)

C – Détermination de F

$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin y^2 dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)y^2}}{x^2+i}dx$

IV. La fonction Gamma

$\forall z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)>0 \qquad \Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$

$\forall z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)>0,\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \qquad \Gamma(1)=1 \qquad \Gamma(n)=n! \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Γ est continue sur $\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>0\}$ $\qquad$ Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$//HP//$ Γ est $\log-$convexe (CS) $\qquad \Gamma(x)\sim_{0^+}\frac{1}{x} \qquad \Gamma(x+1)\sim_{+\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}$

Formule de Gauss : $\forall x>0,\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)} \qquad \frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}$

V. Intégrales doubles

Thm de Fubini sur un pavé : $[a,b],[c,d]$ segments de $\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}([a,b]\times[c,d],\mathbb{C})$

Alors $\varphi: x\mapsto\int_c^d f(x,y)dy$ est continue sur $[a,b]$, $\psi: y\mapsto\int_a^b f(x,y)dx$ est continue sur $[c,d]$

Et $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$

Convolution d'une fonct° périodique : $f,g\in E=\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. $\forall x\in\mathbb{R}: f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$

$//HP//$ $f*g\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ $\|$ $(f,g)\mapsto f*g$ est bilin. $\mathcal{C}°$ asso. sur $(E,\|\ \|_\infty)$ $\|$ Si f ou g est $\mathcal{C}^p$, $f*g$ est $\mathcal{C}^p$

$\forall h\in E,\ c_n(h)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)e^{-int}dt\Rightarrow\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f*g)=c_n(f)\times c_n(g)$

Noyaux : $K\in\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{C})$, $f\in E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$. $\Phi(f): x\mapsto\int_0^1 K(x,t)f(t)dt\in E$

si $(f_n)_n\in E^{\mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\ \|_2$, $(\Phi(f_n))_n$ possède une sous-suite convergente

I,J int. de $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}=\{\text{segments}\subset I\}$, $\mathcal{T}=\{\text{seg}^t\subset J\}$, $(S_n)\in\mathcal{S}^{\mathbb{N}}\nearrow/\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n=I$, (avec $a\in\partial I\cap I\Rightarrow a\in S_0$) idem (T_n)

$f\in\mathcal{C}(I\times J,\underline{\mathbb{R}^+})$ $\qquad$ f est intégrable sur $I\times J$ lorsque $\left\{\iint_{S\times T} f\ /\ S\in\mathcal{S},T\in\mathcal{T}\right\}$ est borné

On pose alors $\iint_{I\times J} f=\sup\limits_{(S,T)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}\left(\iint_{S\times T} f\right)$

$f\in\mathcal{C}(I\times J,\mathbb{R}^+)$ est int. sur $I\times J$ *ssi* la fonction $n\mapsto\iint_{S_n\times T_n} f$ est majorée. Dans ce cas, $\iint_{I\times J} f=\lim\limits_{n\to+\infty}\iint_{S_n\times T_n} f$

$f,g\in\mathcal{C}(I\times J,\mathbb{R}^+),\lambda\in\mathbb{R}^+$ $\qquad$ f et g int. sur $I\times J\Rightarrow f+g$ et λf aussi, et $\iint_{I\times J} f+\lambda g=\iint_{I\times J} f+\lambda\iint_{I\times J} g$

$f\in\mathcal{C}(I\times J,\mathbb{C})$ est intégrable sur $I\times J$ lorsque $|f|$ l'est

$f,g\in\mathcal{C}(I\times J,\mathbb{C})$. $\qquad$ Si $0\le f\le g$ et g int. sur $I\times J$, f l'est aussi

f int. sur $I\times J\Leftrightarrow\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ intégrables sur $I\times J$ $\|$ f,g int. sur $I\times J$, $\lambda\in\mathbb{C}\Rightarrow\lambda f+g$ l'est

Si $f\in\mathcal{C}(I\times J,\mathbb{C})$ est int. sur $I\times J$, on pose $\iint_{I\times J} f=\iint_{I\times J}\mathrm{Re}(f)^+-\iint_{I\times J}\mathrm{Re}(f)^-+i\left(\iint_{I\times J}\mathrm{Im}(f)^+-\iint_{I\times J}\mathrm{Im}(f)^+\right)$

$f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R})$ positive, supposons : $-\ \forall x \in I, f(x,\bullet) \in L^1(J)$ $\quad - \ \psi : x \mapsto \int_j f(x,y)dy$ est continue sur I

Alors f est intégrable sur $I \times J$ ssi ψ est intégrable sur I, et dans ce cas, $\iint_{I\times J} f = \int_I \psi$

f peut être intégrable et pour certaines valeurs, $f(x,\bullet)$ ou $f(\bullet,y)$ ne pas l'être

Thm (Fubini) : Si $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C})$ est intégrable, et si toutes les intégrales partielles de $|f|$ existent et donnent des fonctions continues, ces fonctions sont intégrables et $\int_I \left(\int_J f(x,y)dy\right)dx = \iint_{I\times J} f = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx\right)dy$

Transformées de Fourier : $f \in L^1(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$, $\hat{f}$ est continue, $\exists \lim_{\pm\infty} \hat{f} = 0$

$\tau_h : x \mapsto f(x+h) \Rightarrow \tau_h(f)(x) = e^{ihx}\hat{f}(x)$ $\quad f_\lambda : x \mapsto f(\lambda x) \Rightarrow f_\lambda(x) = \dfrac{1}{|\lambda|}\hat{f}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \mapsto t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, f est de classe $\mathcal{C}^n$, avec $\forall k \in [\![0,n]\!], (\hat{f})^{(k)} = (-1)^k \mathcal{F}(t \mapsto t^k f(t))$

(I)Formule de dualité : $f, g \in L_1^C(\mathbb{R})^2$, alors, correctement, $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}g = \int_{\mathbb{R}} f\hat{g}$ $\quad$ (Fubini)

Transformée de Laplace : $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}). \forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0, \mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$ est bien définie.

$\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\Pi = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ (Localisation sur $[a, +\infty[$), et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Convolutions : $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Lorsque cela a un sens, $f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C_B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $f \star g = g \star f$ est continue.

Si de plus $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à dérivée bornée, $f \star g$ est $\mathcal{C}^1$

Utile : Calcul des dérivées en un point : DL et Taylor

Un "paramètre" étrange dans une intégrale $\rightarrow$ se ramener à une IP et la dériver

Fubini : pour une intégrale double, on montre que c'est intégrable et on calcule de la manière la plus pratique, puis on se ramène à la forme demandée avec Fubini