

Chap 9 : Intégrales à paramètre

X sera un espace métrique, I un intervalle de \mathbb{R}

On cherche à étudier $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ x est le paramètre, t la variable d'intégration

I. Continuité

$f : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$ Supposons :
$$\begin{cases} \forall x \in X, t \mapsto f(x,t) \text{ est } \mathcal{C}_{pm} \\ \forall t \in I, x \mapsto f(x,t) \text{ est continu} \\ \exists \varphi \in L^1(I) \text{ tq } \forall (x,t) \in X \times I, |f(x,t)| \leq \varphi(t) \end{cases}$$

Alors $F : \begin{cases} X \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_I f(x,t)dt \end{cases}$ est définie et continue sur X

On est généralement amené à remplacer X par un voisinage de a pour la 3^e condition

⁽¹⁾ Si X est localement compact (\exists vois compact d'un pt), $I = [a,b]$ segment de \mathbb{R} ,

et $f : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$ globalement continue, alors $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est continue sur X

/!\ Les continuités partielles ne suffisent pas

II. Dérivabilité

I, J intervalles de \mathbb{R} , $f : I \times J \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

– $f(x, \bullet)$ est \mathcal{C}^1 et $f(\bullet, t)$ est \mathcal{C}_{pm} – $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \bullet)$ est \mathcal{C}^0 et $\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet, t)$ est \mathcal{C}_{pm}

– $\forall x \in I, f(x, \bullet)$ est intégrable sur J – $\exists \varphi \in L^1(J), \forall (x,t) \in I \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$

Alors pour tout $x \in I, \frac{\partial f}{\partial x}(x, \bullet)$ est \mathcal{C}^1 et $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

f réelle. $(x_n) \rightarrow a. \frac{F(x_n) - F(a)}{x_n - a} = \int_J \frac{f(x_n,t) - f(a,t)}{x_n - a} dt$ EAF : $\exists c_n, \left| \frac{f(x_n,t) - f(a,t)}{x_n - a} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_n,t) \right| \leq \varphi(t) + CVD$

Si J est un segment et f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $I \times J$, il n'y a pas à vérifier la dernière hypothèse

Pratique : on vérifie : régularité de $f, \frac{\partial f}{\partial x}$; intégrabilité de $f(x, \bullet)$; domination de $\frac{\partial f}{\partial x}$ (localisation)

III. Méthode d'étude des intégrales à paramètre

A – Régularité (domination)

B – Calcul de la dérivée (Intégration directe par décomposition d'une fraction rationnelle)

C – Détermination de F

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin y^2 dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)y^2}}{x^2+i} dx$$

IV. La fonction Gamma

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0 \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(n) = n! \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Γ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$ Γ est dérivable sur \mathbb{R}_+^*

//HP// Γ est log-convexe $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ $\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$

Formule de Gauss : $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}$

V. Intégrales doubles

Thm de Fubini sur un pavé : $[a, b], [c, d]$ segments de $\mathbb{R}, f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{C})$

Alors $\varphi : x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ est continue sur $[a, b], \psi : y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$ est continue sur $[c, d]$

$$\text{Et } \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} f$$

Convolution d'une fonct° périodique : $f, g \in E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \forall x \in \mathbb{R} : f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$

//HP// $f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \parallel (f, g) \mapsto f * g$ est bilin. \mathcal{C}° asso. sur $(E, \parallel \cdot \parallel_\infty)$ \parallel Si f ou g est $\mathcal{C}^p, f * g$ est \mathcal{C}^p

$$\forall h \in E, c_n(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-int} dt \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f * g) = c_n(f) \times c_n(g)$$

Noyaux : $K \in \mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{C}), f \in E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}). \Phi(f) : x \mapsto \int_0^1 K(x, t) f(t) dt \in E$

si $(f_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée pour $\parallel \cdot \parallel_2, (\Phi(f_n))_n$ possède une sous-suite convergente

I, J int. de $\mathbb{R}, \mathcal{S} = \{\text{segments } \subset I\}, \mathcal{T} = \{\text{seg}^t \subset J\}, (S_n) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}} \nearrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = I, (\text{avec } a \in \partial I \cap I \Rightarrow a \in S_0)$ idem (T_n)

$f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R}^+)$ f est intégrable sur $I \times J$ lorsque $\left\{ \iint_{S \times T} f / S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T} \right\}$ est borné

On pose alors $\iint_{I \times J} f = \sup_{(S, T) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}} \left(\iint_{S \times T} f \right)$

$f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R}^+)$ est int. sur $I \times J$ ssi la fonction $n \mapsto \iint_{S_n \times T_n} f$ est majorée. Dans ce cas, $\iint_{I \times J} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{S_n \times T_n} f$

$$f, g \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R}^+), \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad f \text{ et } g \text{ int. sur } I \times J \Rightarrow f + g \text{ et } \lambda f \text{ aussi, et } \iint_{I \times J} f + \lambda g = \iint_{I \times J} f + \lambda \iint_{I \times J} g$$

$f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C})$ est intégrable sur $I \times J$ lorsque $|f|$ l'est

$f, g \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C}).$ Si $0 \leq f \leq g$ et g int. sur $I \times J, f$ l'est aussi

f int. sur $I \times J \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ intégrables sur $I \times J \parallel f, g$ int. sur $I \times J, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f + g$ l'est

Si $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C})$ est int. sur $I \times J$, on pose $\iint_{I \times J} f = \iint_{I \times J} \operatorname{Re}(f)^+ - \iint_{I \times J} \operatorname{Re}(f)^- + i \left(\iint_{I \times J} \operatorname{Im}(f)^+ - \iint_{I \times J} \operatorname{Im}(f)^- \right)$

$f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R})$ positive, supposons : $-\forall x \in I, f(x, \bullet) \in L^1(J) - \psi : x \mapsto \int_J f(x, y) dy$ est continue sur I

Alors f est intégrable sur $I \times J$ ssi ψ est intégrable sur I , et dans ce cas, $\iint_{I \times J} f = \int_I \psi$

f peut être intégrable et pour certaines valeurs, $f(x, \bullet)$ ou $f(\bullet, y)$ ne pas l'être

Thm (Fubini) : Si $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C})$ est intégrable, et si toutes les intégrales partielles de $|f|$ existent et donnent

des fonctions continues, ces fonctions sont intégrables et $\int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx = \iint_{I \times J} f = \int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy$

Transformées de Fourier : $f \in L^1(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt, \hat{f}$ est continue, $\exists \lim_{\pm\infty} \hat{f} = 0$

$$\tau_h : x \mapsto f(x+h) \Rightarrow \tau_h(f)(x) = e^{ihx} \hat{f}(x) \quad f_\lambda : x \mapsto f(\lambda x) \Rightarrow f_\lambda(x) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \mapsto t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R}), f$ est de classe \mathcal{C}^n , avec $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \quad \mathcal{F}(t \mapsto t^k f(t)) = (-1)^k \mathcal{F}(t \mapsto t^k f(t))$

⁽¹⁾ Formule de dualité : $f, g \in L^1_1(\mathbb{R})^2$, alors, correctement, $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}g = \int_{\mathbb{R}} f\hat{g}$ (Fubini)

Transformée de Laplace : $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \forall z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0, \mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt$ est bien définie.

$\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\Pi = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0\}$ (Localisation sur $[a, +\infty[$), et \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*

Convolution : $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Lorsque cela a un sens, $f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}), f \star g = g \star f$ est continue.

Si de plus $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à dérivée bornée, $f \star g$ est \mathcal{C}^1

Utile : Calcul des dérivées en un point : DL et Taylor

Un "paramètre" étrange dans une intégrale \rightarrow se ramener à une IP et la dériver

Fubini : pour une intégrale double, on montre que c'est intégrable et on calcule de

la manière la plus pratique, puis on se ramène à la forme demandée avec Fubini