Chap 8 : Interversion d'une suite ou d'une série et d'une intégrale

I. Convergence bornée

$[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$. Si – la suite CVS sur $[a,b]$ vers $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$

– $(f_n)_n$ est <u>uniformément</u> bornée

Alors $\left(\int_a^b f_n\right)_n$ converge vers $\int_a^b f$

Lemme de Cantor : $(a_n),(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ CVS vers 0 sur $[a,b] \Rightarrow a_n \to 0$ et $b_n \to 0$

p.abs $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\exists \varphi_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u_n(x) = \rho_n \cos(n(x-\varphi_n))$, *CVB de* $(u_n/\rho_n)^2 \Rightarrow (b-a)/2 = 0$

II. Convergence dominée

I intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n) \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ tq : – (f_n) CVS sur I vers $f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C})$

– $\exists \varphi \in L^1(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ (Domination uniforme)

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(I)$, $f \in L^1(I)$ et $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$ (preuve : CVB sur $[-M,M]$)

$^{(I)} I_n = \int_0^1 (1-t^\alpha)^n \, dt$, $\alpha > 0$ On pose $t^\alpha = \frac{u}{n}$ $I_n \sim \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha n^{1/\alpha}}$ où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$

III. Convergence monotone //HP//

I intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n) \in \mathcal{C}(I,\underline{\mathbb{R}^+})^{\mathbb{N}}$ On suppose que : $\forall x \in I, (f_n(x))_n$ croît vers $f(x)$, où $f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R}^+)$

Alors $f \in L^1(I) \Leftrightarrow \int_I f_n$ est bornée. Dans ce cas, $\left(\int_I f_n\right)_n$ converge vers $\int_I f$

IV. Interversion d'une série et d'une intégrale

Thm de Beppo-Levi : I intervalle de $\mathbb{R}$, $(u_n)_n \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ tq $\sum u_n$ converge sur I de somme U CPM

Supposons : $-\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in L^1(I)$ $-\sum \int_I |u_n|$ converge

Alors U est intégrable sur I, la série $\sum \int_I u_n$ converge et $\int_I U = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$

$g_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|, h_n = \min(g_n, |U|) CVM \to U \in L^1(I) \ldots$ $\left|U - \sum_{k=0}^{N} u_k\right| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |u_k|$

Il faut $\sum \int_I |u_n|$ CV. Sinon, il faut regarder les restes (comme avant)

Pratique : transformer un des termes d'une intégrale en série

Utile : intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n!$