Chap 7 : Intégration

I. Intégrales généralisées

$[a,b[$ intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ On dit que $f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R}^p)$ possède une intégrale généralisée sur $[a,b[$ lorsque $F:x\mapsto\int_a^x f$ possède une limite finie en b^-. On dit ainsi que $\int_a^{\to b} f$ converge, et on note $\lim_{x\to b^-}F(x)=\int_a^b f$

Définition analogue pour $]a,b]$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$

$]a,b[$ intervalle ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$, $f\in\mathcal{C}_{pm}(]a,b[,\mathbb{R}^p)$. Soit $c\in]a,b[$. On dit que f possède une intégrale généralisée sur $]a,b[$ lorsque $f_{\setminus]a,c]}$ et $f_{\setminus[c,b[}$ possèdent des intégrales généralisées.

On pose alors $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$ Cela est indépendant du c choisi

$f\in\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R}^p)$ définie sauf en un nombre finie de pts de I. Une singularité de f est :

- à distance finie : un point au voisinage duquel f est non bornée
- $\pm\infty$ si ce point est adhérent à I dans $\overline{\mathbb{R}}$

Intégrales généralisées $\Rightarrow$ Combinaison linéaire || $f=(f_1\ldots f_p)\Rightarrow\left(\int_a^{\to b} f \text{ CV}\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,p]\!],\int_a^{\to b} f_i \text{ CV}\right)$

$f\in C_{pm}([a,b[,\mathbb{R}^p)$ et $\int_a^{\to b} f$ CV $\Rightarrow F:x\mapsto-\int_x^b f$ est une primitive généralisée de f tq $\lim_{x\to b^-}F=0$

Critère de Cauchy : $f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R}^p)$ $\int_a^{\to b} f$ CV *ssi* $\forall\varepsilon>0,\exists b_\varepsilon\in[a,b[,\forall(u,v)\in[b_\varepsilon,b[^2,\left\|\int_u^v f\right\|\le\varepsilon$

$\Rightarrow f\in\mathcal{C}_{pm}(]a,b[,\mathbb{R}^p)$ $\int_{\to a}^{\to b} f$ CV *ssi* $\exists\lim_{(u,b)\to(a^+,b^-)}\int_u^v f$

II. Fonctions intégrables

$f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ positive. On a équivalence entre :

- $\int_a^{\to b} f$ converge
- $x\mapsto\int_a^x f$ est bornée sur $[a,b[$
- $\exists M>0,\forall S$ segment inclus dans $[a,b[$, $\int_S f\le M$
- $\exists(S_n)_n$ suite de segments de $[a,b[$ tq $S_n\nearrow$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n=[a,b[$ et $\left(\int_{S_n} f\right)_n$ est majorée

Le théorème se généralise à $]a,b[$:

$^{(I)}$Si $f\ge0$ est intégrable sur $]a,b[$ et si $(S_n)_n$ suite $\nearrow$ de segments dont l'union est $]a,b[$, $\int_a^b f=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{S_n} f$

$f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{C})$ est intégrable sur $[a,b[$ lorsque $|f|$ possède une intégrale généralisée sur $[a,b[$

Si f est intégrable sur $[a,b[$, elle possède une intégrale généralisée sur $[a,b[$

Domination : $f,g\in\mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{C})$. Si $f=\mathcal{O}(|g|)$ et si g est intégrable sur $[a,b[$, alors $|f|$ aussi

I intervalle de $\mathbb{R}$, on note $L^1(I)=\{f\in\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C}),\ f$ intégrable sur $I\}$ C'est un *sev* de $\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C})$

Si I est borné, toute fonction CPM bornée $I\to\mathbb{C}$ appartient à $L^1(I)$

$f\in L^1(I)$ et $g\in\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R})$ est bornée, $gf\in L^1(I)$

Intégrales de réf : $\int_1^{\to+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ CV *ssi* $\alpha>1$. $\int_2^{\to+\infty}\frac{dt}{t^\alpha\ln^\beta}$ CV *ssi* $\alpha>1$ ou $\alpha=1$ et $\beta>1$ $\int_{\to 0}^1\frac{dt}{t^\alpha}$ CV *ssi* $\alpha<1$

Si $\alpha>1$ et $t^\alpha f(t)$ est bornée et possède une limite en $+\infty$, $f\in L^1([1,+\infty[)$

En pratique : Domination. Equivalent ($f\sim_{b^-}g,(f,g>0)\Rightarrow f$ int sur $[a,b[\Leftrightarrow g$ int sur $[a,b[$)

$^{(I)}F=G+\sum_{z\text{ pôle de }F}\frac{\lambda_z}{X-z}\in\mathbb{R}(X)$ sans pôle réel. Intégrable sur $\mathbb{R}$ *ssi* $\deg F\le -2$. $\int_{-\infty}^{+\infty}F=-2\pi\sum_{\substack{z\text{ pôle}\\ \mathrm{Im}(z)>0}}\mathrm{Im}(\lambda_z)$

supp $f=\overline{\{x\in\mathbb{R},,f(x)\neq 0\}}$ $\mathcal{C}_C(\mathbb{R})=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})/\operatorname{supp}f$ est compact$\}$ $L_1^C(\mathbb{R})=\{f\in L^1(\mathbb{R})/\ f$ continue$\}$

$\mathcal{C}_C(\mathbb{R})$ est dense dans $L_1^C(\mathbb{R})$ || $f\in L_1^C(\mathbb{R})\Rightarrow\exists\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt=0$ || $L_1^C(I)$ non complet pour $\|\ \|_1$

III. Méthodes d'étude d'une intégrale généralisée

Intégrabilité $\to$ Domination, équivalent || Calcul $\to$ Int° par parties, Dvt asymptotique, Chgt de variable

$^{(I)}f(t)=\frac{\sin t}{t}\int_0^{+\infty}f$ CV (IPP), $\int_0^{+\infty}|f|$ DV (maj°), $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=\int_0^{+\infty}f$, et $\int_0^{+\infty}f=\frac{\pi}{2}$ (utiliser $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}dt=\frac{\pi}{2}$)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi:I\to J$ un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme. $\forall f\in\mathcal{C}_{pm}(J,\mathbb{R})$:

$\int_j f$ CV $\Leftrightarrow\int_I(f\circ\varphi)\varphi'$ CV Dans ce cas $\int_J f=\int_I(f\circ\varphi)|\varphi'|$

f intégrable sur $J\Leftrightarrow(f\circ\varphi)\varphi'$ intégrable sur I

$f\in\mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ possédant des limites finies l et l' en 0^+ et $+\infty.0<a<b\Rightarrow\int_+^{+\infty}\frac{f(bt)-f(at)}{t}dt=(l-l')\ln\frac{b}{a}$

$f\searrow:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ $\int_0^{+\infty}f$ CV *ssi* $\sum f(n)$ CV

$f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ tq $|f'|\in L^1(\mathbb{R}^+)\Rightarrow$ $\sum f(n)$ CV $\Leftrightarrow\left(\int_0^n f\right)_n$ CV $\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}f$ CV

$f\in\mathcal{C}([a;+\infty[,\mathbb{R})$, $(a_n)\in[a,+\infty[^{\mathbb{N}}$ croissante non bornée. $\int_0^{+\infty}f$ CV $\Rightarrow\sum\int_{a_n}^{a_{n+1}}f$ CV.

La réciproque est vraie si $f\ge 0$ En particulier, $\sum\int_{a_n}^{a_{n+1}}|f|$ CV $\Rightarrow\int_a^{+\infty}f$ CV

IV. Intégration des relations de comparaison

$f,g\in\mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$, $g>0$ intégrable sur $[a,b[$. $f=O_{b^-}(g)\Rightarrow\int_a^{\to b}|f|$ CV et $\int_x^b f=O_{b^-}\left(\int_x^b g\right)$ (idem o_{b^-} ou $\sim_{b^-}$)

$f,g\in\mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$, $g>0$ d'intégrale DV sur $[a,b[$: $f=o_{b^-}(g)\Rightarrow\int_a^x f=o_{b^-}\left(\int_a^x g\right)$ (idem O_{b^-} ou $\sim_{b^-}$)

V. Compléments

$f \in C_{pm}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ tq $\int_0^{+\infty} f$ CV $\quad f \xrightarrow{+\infty} l \Rightarrow l=0 \;||\; \int_0^{+\infty} f'$ CV $\Rightarrow f \xrightarrow{+\infty} 0 \quad || \quad f$ UC $\Rightarrow f \xrightarrow{+\infty} 0$

$\int_0^{+\infty} f$ CV avec $f \searrow \Rightarrow xf(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

Pratique : $\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{dx}{x-(a+ib)} = \frac{1}{2}\left[\ln((x-a)^2-b^2)\right]_{-A}^{A} + i\left[\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]_{-A}^{A}$

Symétries : Changements de variables $t=\dfrac{1}{u}$

Cauchy-Schwarz : $\left|\int_x^y f\right| \leq \sqrt{\int_x^y f^2}\sqrt{\int_x^y 1} \qquad (f+g)^2 \leq 2(f^2+g^2)$

Renforcer la convergence avec IPP

Equivalents intégraux $\rightarrow$ IPP

$u_n = \int (\ldots)^n \rightarrow t^\alpha = \dfrac{u}{n}\ldots$