Chap 6 : Intégrale de Riemann à valeur dans un Banach

I. Construction

$[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, $a<b$ $\quad (E,\|\ \|)$ espace de Banach $\quad \mathcal{E}([a,b],E)$ est le $\mathbb{R}-ev$ des fonctions en escalier

$\varphi\in\mathcal{E}$, $\sigma=(x_0...x_n)$ subdivision adaptée à φ

Le vecteur $I(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\varphi\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ ne dépend pas de σ

$\varphi\mapsto I(\varphi)\in\mathscr{L}(\mathcal{E},E)$ de norme $b-a$

$I(\varphi)$ s'appelle l'intégrale de φ sur $[a,b]$, que l'on note $\int_a^b\varphi$

$f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],E)$ et $(\varphi_n)\in\mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ CVU vers f

$\Rightarrow I(\varphi_n)$ CV, sa limite ne dépend pas de (φ_n), on l'appelle intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_a^b f$

Linéarité de l'intégrale, $\|$ $\left\|\int_a^b f\right\|\le(b-a)\|f\|_\infty$ $\|$ $\left\|\int_a^b f\right\|\le\int_a^b\|f\|$ $\|$ $E=\mathbb{R}\Rightarrow$ positivité $\Rightarrow$ croissance

$E=\mathbb{R}$: si $f\ge 0$ est strictement positive sur un point de continuité, $\int_a^b f>0$

II. Sommes de Riemann

$(\sigma_n)=((x_{i\,n})_{i\in\llbracket 0,p_n\rrbracket})_{n\in\mathbb{N}}$ suite de subdivisions de $[a,b]$ dont le pas $|\sigma_n|$ tend vers 0.

$\forall n\in\mathbb{N},\forall i\in\llbracket 0,p_{n-1}\rrbracket, c_{i\,n}\in[x_{i\,n},x_{i+1\,n}]$

$\Rightarrow\forall f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],E)$, la suite $S_n(f)=\sum_{i=0}^{p_n-1}(x_{i+1\,n}-x_{i\,n})f(c_{i\,n})$ converge vers $\int_a^b f$

f $k-lip\Rightarrow ok$ $\qquad$ Approximation par $APM\Rightarrow ok$

III. Formule de Leibniz

$[a,b]$ intervalle de $\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{N}^*$ $\quad f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}^p)$

$F:[a,b]\to\mathbb{R}^p$ $\qquad$ On dit que F est une primitive généralisée de f si

F est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et : $\exists F'(x)=f(x)$ en tout point de continuité de f

$$F:\begin{cases}[a,b]\to\mathbb{R}^p\\ x\mapsto\int_a^b f\end{cases}$$ est une primitive généralisée de f

F primitive généralisée de f sur $[a,b]$: $\qquad\forall$primitive généralisée G de f sur $[a,b]$, $F-G$ est constante

$\int_a^b f=F(b)-F(a)$

$f,g\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ $\quad F,G$ deux primitives généralisées de f et g :

$$\int_a^b F(x)g(x)dx=[FG]_a^b-\int_a^b f(x)G(x)dx$$