Chap 5 : Séries de fonctions

I. Convergence simple

(X,d) espace métrique, E evn

Série géom : $\sum z^n, z \in \mathbb{C}$ $|z|<1$: CV de somme $\frac{1}{1-z}$ $|z| \geq 1$ DV

Série exponentielle : $(A,\| \ \|)$ algèbre de Banach, $a \in A$ $\sum \frac{a^n}{n!}$ CV (car ACV)

Logarithme complexe : $\sum \frac{z^n}{n} (= -Log(1-z)$ pour $z \in D(0,1))$ $|z|<1$ ACV, $z=1$ DV, $|z|=1, z \neq 1$ CV (Abel)

Pour $z = e^{i\theta}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$

$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ CV si $\mathrm{Re}(z) > 1$ $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ ACV pour $\mathrm{Re}(z) > 0$

II. Modes de convergence

C'est celui des sommes partielles : $\sum u_n$ CVU $\Leftrightarrow U_n$ CVU

$^{(I)}(u_n) \in \mathfrak{F}(X,E)^{\mathbb{N}}$ $\sum u_n$ CVU $\Leftrightarrow \sum u_n$ CVS et la suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$ CVU vers 0

Critère de Cauchy uniforme (CCU) : $\sum u_n$ série de fonctions $X \to E$

$\sum u_n$ CVU $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_\varepsilon, \forall x \in X, \left\| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right\| \leq \varepsilon$

Condition suffisante si E est complet

Négation : $\exists \varepsilon > 0, \exists p_n < q_n$ croissant vers $+\infty$, $\exists (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{k=p_n}^{q_n} u_k(x_n) \right\| \geq \varepsilon$

$^{//HP//}(u_n) \in \mathcal{C}(X,E)^{\mathbb{N}}$ avec E complet. $\sum u_n$ CVU sur $A \subset X$, $\sum u_n$ CVU sur $\overline{A}$

$\sum u_n$ série de fonctions $X \to E$ $\sum u_n$ converge normalement lorsque $\sum \|u_n\|_\infty$ CV

En pratique : $\exists (\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \|u_n(x)\| \leq \alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ CV

E complet : $CVN \Rightarrow CVU$

$^{//HP//}$Méthode d'Abel : $(\varepsilon_n), (v_n) \in \mathfrak{F}(X,\mathbb{C})$ tq $\begin{cases} \forall x \in X, \varepsilon_n(x) \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \varepsilon_n(x) \searrow 0 \\ \forall x \in X, v_n(x) \in \mathbb{C} \text{ et } \left|\sum_{k=0}^{n} v_k(x)\right| \text{ est bornée} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum \varepsilon_k v_k$ CVS Si ε_n CVU vers 0, $\sum \varepsilon_k v_k$ CVU

III. Propriétés de la somme

$(u_n)_n \in \mathfrak{F}(X,E)^{\mathbb{N}}$, $a \in X$ tq $\forall n, u_n$ $\mathcal{C}^0$ en a. S'il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ sur lequel $\sum u_n$ CVU, la somme $\sum u_n$ est $\mathcal{C}^0$ en a

ζ est $\mathcal{C}^0$ sur $\Pi = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 1\}$

Interversion des limites : $A\subset X, a\in\overline{A}$, $(u_n)_n \in \mathcal{F}(X,E)^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ CVU sur A, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} u_n(x)=\alpha_n$

et E est complet : $\sum \alpha_n$ CV et $f=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ possède une limite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n$ en a : $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_n(x)$

$\mathbb{Q}=\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n(x)=0$ si $x<r_n$, $\frac{1}{2^n}$ si $x\geq r_n$: $f=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$, est strictement croissante et l'ens. de ses pts de discont° est $\mathbb{Q}$

$(u_n)_n\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}^p)^{\mathbb{N}}$ $\quad\sum u_n$ CVU vers $u\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})\Rightarrow\sum\int_a^b u_n$ CV de somme $\int_a^b u$

$(u_n)\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^p)^{\mathbb{N}}$ $\sum u_n(a)$ CV et $\sum u_n'$ CVU sur $[a,b]$, de somme V

$\Rightarrow \sum u_n$ CVU sur $[a,b]$ de somme U $\mathcal{C}^1$, avec $U'=V$

Extension : $\sum u_n$ CVS sur $[a,b]$, $\forall k\in\ 1,p\ $, $\sum u_n^{(k)}$ CVU sur $[a,b]\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ est $\mathcal{C}^p$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n\right)^{(k)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n^{(k)}$

Sur un intervalle I non compact, on travaille sur les segments inclus dans I

$x\in]1,+\infty[$, $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$ $\zeta(x)\underset{x\to 1^+}{\sim}\frac{1}{x-1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$

$x\in\mathbb{R}_+^*$ $\theta(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}e^{-n^2x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\qquad \theta(x)\underset{0^+}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=1$

Utile : $|q|<1\Rightarrow\frac{1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q^n$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(p)}=\frac{(-1)^{p-1}p!c^p(ad-bc)}{(cx+d)^{p+1}}$$

Si on a une intégrale dans une intégrale, penser à faire une IPP