Chap 4 : Convergence des suites de fonctions

I. Généralités

X ensemble, $(E,\|\ \|)$ evn, $(f_n)_n\in\mathcal{F}(X,E)^{\mathbb{N}}$, $A\subset X$

(f_n) est simplement convergente (CVS) sur A lorsque : $\forall x\in A,\ f_n(x)$ CV (vers $f(x)$)

(f_n) converge uniformément (CVU) sur A lorsque : $\exists f:A\to E,\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall n\geq n_\varepsilon,\sup\limits_{x\in A}\|f_n(x)-f(x)\|\leq\varepsilon$

$^{(I)}$ $A=\mathbb{R}^+,\ f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ CVU vers 0 (avec *Stirling*)

$f_n\xrightarrow{CVU} f$ et $(x_n)_n\in A^{\mathbb{N}}\Rightarrow f_n(x_n)-f(x_n)\to 0$

Opérations conservant la CVU : Combinaison linéaire, multiplication par une fonction bornée

Composition à droite : OK ($f_n\xrightarrow{CVU} f\Rightarrow f_n\circ g\xrightarrow{CVU} f\circ g$), à gauche : NON en gén, OK si g est UC

II. Critère de Cauchy uniforme

Si (f_n) est uniformément convergente, elle vérifie : $\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall m>n\geq n_\varepsilon,\sup\|f_m(x)-f_n(x)\|\leq\varepsilon$

Cette condition est suffisante si E est complet

$^{(I)\ //HP//}$ Si $(f_n)\in\mathcal{C}(X,E)^{\mathbb{N}}$, $A\subset X$ métrique et E complet, $f_n\xrightarrow{CVU} f$ sur $A\Rightarrow f_n\xrightarrow{CVU} f$ sur $\overline{A}$

On n'étudie pas la CVU sur un ouvert.

Si une suite de polynômes CVU sur un intervalle non borné, sa limite est un polynôme

III. Approximation

$[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, E evn

$f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],E):\forall\varepsilon>0,\exists\varphi\in\underbrace{\mathcal{E}([a,b],E)}_{\text{fct en escalier}}$ tq $\|f(x)-\varphi(x)\|\leq\varepsilon$ $\left(\Leftrightarrow\exists(\varphi_n)_n\in\mathcal{E}([a,b],E)^{\mathbb{N}}\text{ CVU vers } f \text{ sur } [a,b]\right)$

$^{(I)}$ $f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ $\lim\limits_{\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt=0$ (Montrer d'abord pour f en escalier, puis utiliser l'approx)

$f\in\mathcal{C}([a,b],E)\ \varepsilon>0:\exists\varphi:[a,b]\to E$ affine par morceaux telle que $\sup\limits_{[a,b]}\|f-\varphi\|\leq\varepsilon$

$\Leftrightarrow\exists(\varphi_n)$ suite de fonctions affines par morceaux $[a,b]\to E$ CVU vers f sur $[a,b]$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $k-$lip : $\varphi_n:x\mapsto n\int_x^{x+\frac{1}{n}}f(t)dt$ suite de fonctions C^1 (somme de 2 intégrales), $\varphi_n\xrightarrow{CVU} f$ et $|\varphi'|\leq k$

Weierstrass : $f\in\mathcal{C}(\underline{[a,b]},\mathbb{C})$ $\forall\varepsilon>0:\exists P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $\sup\limits_{[a,b]}|f-P|\leq\varepsilon$ $(\Leftrightarrow\exists(P_n)\in\mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ CVU vers f $\underline{\text{sur }[a,b]})$

Thm des moments : $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ $\left(\forall n\in\mathbb{N},\int_a^b f(x)x^n dx=0\right)\Rightarrow f=0$

(Weierstrass: $P_n\underset{CVU}{\to}\overline{f}, P_nf\to|f|^2, 0=\int_a^b P_nf\to\int_a^b|f|^2$ sur $\underline{\text{segment}}$)

$\mathcal{T}=Vect(e^{ik\bullet})_{k\in\mathbb{Z}}$ est l'algèbre des polynômes trigonométriques

$\mathcal{T}_n = Vect(e^{ik\bullet})_{k\in -n,n} = Vect_{\mathbb{C}}(1,\cos(\bullet),...,\cos(n\bullet),\sin(\bullet),...,\sin(n\bullet)) = Vect_{\mathbb{C}}(1,\cos,...,\cos^n,\sin,...,\sin^n)$

$f\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ($2\pi-$périodique) $\forall\varepsilon>0,\exists P\in\mathcal{T}$ tq $\sup_{\mathbb{R}}|f-P|\le\varepsilon$ ($\Leftrightarrow \exists(P_n)\in\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ CVU vers f sur $\mathbb{R}$)

$Q_n : t\to c_n\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n \in\mathcal{T}_n$ avec $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q_n=1\Rightarrow c_n<\frac{\pi(n+1)}{2}\Rightarrow Q_n\ge 0, Q_n\underset{CVU}{\to}0$ sur $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$,

$f*Q_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)Q_n(t)dt\in\mathcal{T},|f*Q_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|Q_n(t)+2\|f\|_\infty\sup_{\delta\le|t|\le\pi}Q_n(t)$

IV. Théorèmes « de transfert à la limite »

$A\subset(X,d)$ em, $(E,\|\ \|)$ evn

Convergence simple : Croissance, Convexité et $k-lip$ (avec k fixé)

$f_n : X\to E, a\in X$, et $f_n\xrightarrow{CVS}f$. Si $\begin{cases}\exists U\in\mathcal{V}(a) \text{ tq } f_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } U\\ \text{chaque } f_n \text{ est continu en } a\end{cases}\Rightarrow f$ est continue en a

$^{(I)}$ $//HP//$ Convergence diagonale : $(f_n)_n\in\mathcal{C}(X,E)^{\mathbb{N}}, f_n\xrightarrow{CVU}f$ sur X et $(x_n)_n\in X^{\mathbb{N}}$ CV vers x, $f_n(x_n)\to f(x)$

$a\in\overline{A},(f_n)\in\mathcal{F}(A,E)^{\mathbb{N}}$, si $\begin{cases}f_n\xrightarrow{CVU}f \text{ sur } A\\ \forall n, f_n \text{ possède une limite } l_n \text{ en } a \text{ selon } A\\ \underline{E \text{ est complet}}\end{cases}\Rightarrow\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in A}}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in A}}f_n(x)\right)$

Marche aussi si $A=[M,+\infty[$

$(f_n)_n\in\mathcal{C}_{pm}\underline{([a,b],\mathbb{R}^p)}$ $f_n\xrightarrow[{[a,b]}]{CVU}f$ $\mathcal{C}^0_{pm}$ $\Rightarrow\int_a^b f_n\to\int_a^b f$

$(f_n)\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^p)^{\mathbb{N}}$ Si $(f_n(a))_n$ CV, et $(f_n')_n$ <u>CVU</u> vers g sur $[a,b]\Rightarrow(f_n)$ CVU sur $[a,b]$ vers f $\mathcal{C}^1$ tq $f'=g$

Localisation : $(f_n)_n\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^p)^{\mathbb{N}}$ CVS sur $I\Rightarrow$ La CVU de f_n' sur les <u>segments de I</u> suffit pour avoir f $\mathcal{C}^1$

Dérivées d'ordre p : (f_n) $\mathcal{C}^p\underset{CVS}{\to}f$, $(f_n^{(1)}(a),...,f_n^{(p-1)}(a))_n$ CV et $f_n^{(p)}$ CVU fers $g\Rightarrow f$ $\mathcal{C}^p$, et $\forall i, f_n^{(i)}\underset{CVU}{\to}f^{(i)}$

/!\ Il faut bien vérifier $(f_n^{(p)})$ CVU : $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ nulle part dérivable est limite uniforme de polynômes $\mathcal{C}^\infty$

$f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C}),\ \varepsilon>0,\ \exists g\in\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{C})$ tq $\|f-g\|_1\le\varepsilon$ (Rendre continu avec prolongements APM, Weierstrass)