Chap 3 : Topologie et analyse fonctionnelle

Préliminaires : cardinaux

Deux ensembles X et Y sont équipotents s'il existe une bijection de X vers Y. C'est une relation d'équivalence

Un ensemble X est fini lorsque $X=\varnothing$ ou : $\exists n\in\mathbb{N}^*/X$ est équipotent à $[\![1,n]\!]$

Les axiomes de Peano donnent l'unicité du n. On pose $\operatorname{card}\varnothing=0$ et $\operatorname{card}X=n$ sinon

Un ensemble X est infini dès que $X\neq\varnothing$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, X$ n'est pas équipotent à $[\![1,n]\!]$

X est infini *ssi* il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans X

L'ensemble ordonné $(E,\le)$ est inductif lorsque toute partie A totalement ordonnée, non vide de E possède une borne supérieure : $\exists c\in E$, c majorant de A et tout majorant M de A vérifie $M\ge c$

(X,Y) ens. : $E=\{(A,f)/A\subset X$ et $f:A\mapsto Y$ injection$\}$ $\quad (A,f)\le(B,g)\Leftrightarrow A\subset B$ et $g_{|A}=f$ $\quad (E,\le)$ est inductif

Axiome de *Zorn* : Tout ensemble ordonné inductif non vide possède un élément maximal

Il existe une classe Ω d'ensembles, appelés cardinaux, tels que, pour tout ensemble X, il existe un unique ensemble $\operatorname{card}X\in\Omega$ tel que X est équipotent à $\operatorname{card}X$

E,F cardinaux : E et F équipotents $\Rightarrow E=F$

X et Y ensembles : il existe une injection de X dans Y ou une injection de Y dans X

Utiliser l'exemple d'ens. inductif + Zorn : el^t max $(A,f)\Rightarrow$ Soit $A=Y$, soit f surj (p.abs)

Théorème de Cantor-Bernstein : X et Y ensembles. S'il existe une injection f de X dans Y et une injection g de Y dans X, alors X et Y sont équipotents.

Suite des antécédents (uniques s'ils existent) de $x_0\in X: y_1\in Y/g(y_1)=x_0, x_1\in X/f(x_1)=y_1 ...\Rightarrow(x_0,y_1...)$ finie ou ∞.

$A=\{x_0\in X/(x_0...)$ finie de card impair$\}$, $B\to$ impair, $C\to\infty$ $\quad$ Idem sur $y_0\in Y, A'\to$ impair, $B'\to$ pair

$\varphi_{|A}=f,\ \varphi_{|B}=g^{-1},\ \varphi_{|C}=f \qquad \varphi(A)=A',\ \varphi(B)=B',\ \varphi(C)=C' \qquad \varphi$ inj tq $\varphi(X)=Y\Rightarrow$ surj

La relation sur la classe Ω : $(E\le F\Leftrightarrow$ il existe une injection de E dans $F)$ est une relation d'ordre total

Un ensemble est dénombrable s'il est fini ou s'il existe une bijection de X dans $\mathbb{N}$ (strict. dénombrable = dén. ∞)

"Etre dénombrable" se conserve par bijection. $\quad A\subset\mathbb{N}\Rightarrow A$ dénombrable

S'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$, X est dénombrable.

X dénombrable $\Leftrightarrow$ Il existe une surjection d'un ensemble dénombrable dans X

$\mathbb{Z},\mathbb{N}\times\mathbb{N},\mathbb{Q}$, les nombres algébriques sont dénombrables.

Si X et Y sont dénombrables, $X\times Y$ aussi.

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles dénombrables, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$ est dénombrable.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : son cardinal c_0 est appelé puissance du continu

$\mathbb{R}^2,[0,1],]0,1[$ ont la puissance du continu

I. Ouverts et fermés

(E,d) est un espace métrique

On dit que $\Omega \subset E$ est un ouvert (pour d) si : $\forall x \in \Omega, \exists r > 0 / B(x;r) \subset \Omega$

Une boule ouverte de E est un ouvert de E

$\mathcal{O}$ ensemble des ouverts de E ($\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$). $\mathcal{O}$ vérifie les trois propriétés suivantes :

$(\mathcal{T}_1)$ $\varnothing$ et E sont dans $\mathcal{O}$

$(\mathcal{T}_2)$ Une réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$

$(\mathcal{T}_3)$ Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$

(H) $\forall (x,y) \in E^2, x \neq y, \exists (\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{O}^2$ tq $\begin{cases} x \in \Omega_1,\ y \in \Omega_2 \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing \end{cases}$

Une collection de parties $\mathcal{O}$ vérifiant $(\mathcal{T}_1)$, $(\mathcal{T}_2)$, $(\mathcal{T}_3)$ est une topologie.

Si $\mathcal{O}$ vérifie de plus (H), on dit que la topologie est séparée

Une partie V est un voisinage de $a \in E$ lorsqu'il existe un ouvert Ω tel que $a \in \Omega \subset V$

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a

$E \in \mathcal{V}(a)$. || $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(a)$ || $V \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists r > 0 / B(a,r) \subset V$

L'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a

Une partie $\Omega \subset E$ est ouverte *ssi* elle est un voisinage de chacun de ses points

Soit $a \in E$, $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur un voisinage de a à valeurs dans E'

Une propriété $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{F}$ est locale lorsque : $\forall (f,g) \in \mathcal{F}^2, (\exists V \in \mathcal{V}(a) / f_{\backslash V} = g_{\backslash V}) \Rightarrow (\mathcal{P}(f) \Leftrightarrow \mathcal{P}(g))$

Une partie F de E est fermée dans E si son complémentaire $E \setminus F$ est ouvert dans E

Par complémentarité : (F_1) E et $\varnothing$ sont fermés

(F_2) Une intersection de fermés est un fermé

(F_3) Une réunion finie de fermés est un fermé

Intervalle de $\mathbb{R}$: ouvert/fermé pour l'ordre $\Leftrightarrow$ ouvert/fermé pour $d = |.|$

$(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. La boule $\overline{B}(a,r)$ est fermée pour d

(E,d) espace métrique, $A \subset E$

La distance induite par d sur A est la restriction de d à $A \times A$, notée d_A

On appelle topologie trace (ou induite) sur A la famille des parties de A de la forme $\Omega \cap A$, où Ω ouvert de E

$\mathcal{O}_A = \{\Omega \cap A, \Omega \in \mathcal{O}\}$ est alors une topologie. Une partie $\omega \subset A$ est dans $\mathcal{O}_A$ *ssi* ω est ouverte pour d_A

$B \subset A$. On a équivalence entre : $a)$ B est fermé pour d_A $b)$ B est fermé pour $\mathcal{O}_A$

$c)$ Il existe un fermé F de E tel que $B = A \cap F$

A ouvert $\Leftrightarrow$ Tout ouvert de $\mathcal{O}_A$ est ouvert de $\mathcal{O}$ || A fermé $\Leftrightarrow$ Tout fermé de A est fermé dans E

Un point $a \in A$ est intérieur à A lorsque $A \in \mathcal{V}(a)$ $\Leftrightarrow (\exists \omega$ ouvert de $A / a \in \omega \subset A) \Leftrightarrow (\exists r > 0, B(a,r) \subset A)$

L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle intérieur de A et se note $\overset{\circ}{A}$ ou $\operatorname{int}(A)$

$\overset{\circ}{A}$ est ouvert, c'est le plus grand ouvert inclus dans A

$b \in E$. On a équivalence entre : (i) $\forall V \in \mathcal{V}(b), V \cap A \neq \varnothing$

(ii) $\forall \omega$ ouvert de E, $b \in \omega \Rightarrow \omega \cap A \neq \varnothing$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, B(b,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$

(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, d(b,x) < \varepsilon$

On dit alors que b est adhérent à A. L'adhérence de A $\operatorname{adh}(A)$ (ou $\overline{A}$) est l'ensemble des points adhérents à A

$E \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(E \setminus A)$

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A : $\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé} / A \subset F} F$

On a tjs : $B(a,r) \subset \operatorname{int}(\overline{B}(a,r))$. $\quad E$ evn $\Rightarrow B(a,r) = \operatorname{int}(\overline{B}(a,r))$ $\quad$ (ctr.ex : $\mathbb{Z}$)

$\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$ $\quad E$ evn $\Rightarrow \overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$

$A \subset E, b \in E \Rightarrow$ $\quad b \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n)_n \xrightarrow{n \to +\infty} b$

A est fermée $\Leftrightarrow \overline{A} = A \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, [(x_n)_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} x_n \in A]$

$(E, \|\ \|)$ evn : $A \subset E$ est convexe lorsque : $\forall (x,y) \in A^2, [x,y] = \{(1-t)x + ty / t \in [0,1]\} \subset A$

$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \operatorname{int}(A \cup B)$ $\quad \operatorname{int}(A \cap B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ $\quad A$ convexe $\Rightarrow \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ convexes

$A \subset E$ et $B \subset E$. A est dense dans B lorsque $B \subset \overline{A}$. || Si A est dense dans E, on dit qu'elle est partout dense.

$A \subset E$ dense dans $E \Leftrightarrow$ Tout ouvert non vide de E rencontre $A \Leftrightarrow$ Tout point de E est limite d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$

Sous groupes additifs de $\mathbb{R}$: denses dans $\mathbb{R}$ ou $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Frontière de A : $\partial A = Fr(A) = \overline{A} \setminus \dot{A}$

$a \in A$ point isolé de A : $\exists r > 0 / B(a,r) \cap A = \{a\}$ $\quad$ || $\quad a \in \overline{A}$ point d'accumulation : $\forall r > 0, (B(a,r) \setminus \{a\}) \neq \varnothing$

$A^i = \{$points isolés de $A\}$ $\qquad A' = A^c = \{$points d'accumulation de $A\}$

II. Limites, continuité

(E,d) et (F,δ) espaces métriques

$f : E \to F, A \subset E, a \in \overline{A}$. f admet une limite en a selon A lorsqu'il existe $l \in F$ tq :

$\forall V \in \mathcal{V}(l), \ \exists U \in \mathcal{V}(a) \ / \ f(U \cap A) \subset V$ $\qquad (\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in B(A,\eta) \cap A, \ \delta(f(x), l) \le \varepsilon)$

Si f admet l et l' pour limites en a selon A, $l = l'$ $\quad$ || $\quad$ Si $\exists \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$ et $a \in A$, alors $l = f(a)$

La notion de limite est locale en a. $\quad$ || $\quad f$ possède un limite en a selon $A \Rightarrow f$ bornée au voisinage de a

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l \Rightarrow l \in \overline{f(A)}$ || $A' \subset A,\ a \in \overline{A'}$ et $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A'}} f(x) = l$

Réunion FINIE avec même limite : $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$ et $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup B}} f(x) = l$

Limites infinies : $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \|f(x)\| = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in B(a,r) \cap A,\ f(x) \geq M$

$\exists \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 / \forall x \in E, \|x\| \geq r \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$

Opérations : Combinaison linéaire ok. Composition : $f : E \to F, g : F \to G, A \subset E, a \in \overline{A}, B \subset F$ et $b \in \overline{B}$

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b,\ \exists \lim\limits_{\substack{y \to b \\ y \in B}} g(y) = l,\ \underline{f(A) \subset B} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g \circ f(x) = l$

Si $(F, \|\ \|)$ algèbre normée, $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l,\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x) = l' \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x) * f(x) = l * l'$

Critère séquentiel : $a \in \overline{A}$ f possède une limite en a selon $A \Leftrightarrow (\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, ((x_n) \to a \Rightarrow (f(x_n))$ CV))

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone possède en tout point où cela a un sens une limite à gauche et à droite

On dit que $f : E \to F$ est continue en $a \in E$ lorsque : $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V \in \mathcal{V}(a) / f(U) \subset V \quad \Leftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{V}(f(a)),\ f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans E

Opérations : Combinaison linéaire, produit, composition.

f continue en $a \in E \Leftrightarrow (\forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, ((x_n)_n \to a \Rightarrow (f(x_n))_n$ CV))

$f : I \to \mathbb{R}$ réglée lorsque f admet une limite à gauche et à droite en tout point de I ou cela a un sens

f tq $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R} / f(x) = \lambda x \Leftrightarrow f\ \mathcal{C}^{\circ} \Leftrightarrow f$ a au moins 1 pt de $\mathcal{C}^{\circ}$

$\Leftrightarrow f$ monotone $\Leftrightarrow f$ bornée sur $\mathcal{V}(0) \Leftrightarrow$ le graphe de f n'est pas dense dans $\mathbb{R}^2$

III. Propriétés globales des fonctions continues

$f : E \to F, A \subset E$ f est continue sur A si $f_{\backslash A}$ est continue

f est continue si elle est continue en tout point de E $\mathcal{C}(E,F) = \{f : E \to F\ \mathcal{C}^{\circ}\}$

Si A ouvert et $f_{\backslash A}$ continue, tout point de A est point de continuité de f

F evn $\Rightarrow \mathcal{C}(E,F)$ est un espace vectoriel F algèbre normée $\Rightarrow \mathcal{C}(E,F)$ algèbre

$f : E \to F$. On a équivalence entre : (i) f est $\mathcal{C}^{\circ}$

(ii) $\forall \Omega$ ouvert de F, $f^{-1}(\Omega)$ ouvert de E

(iii) $\forall F$ fermé de F, $f^{-1}(F)$ fermé de E

$f \in \mathcal{C}(E,F)$ $b \in F \Rightarrow f^{-1}(\{b\})$ fermé En particulier, l'ensemble des 0 d'une fonction est fermé

$f : X \to Y$ est ouverte (resp. fermée) si pour tout Ω ouvert (resp. fermé) de X, $f(\Omega)$ est ouvert (resp. fermé) dans Y

(X,Y) espaces topologiques, $f : X \to Y$ est un homéomorphisme lorsque f bijection continue et f^{-1} continue

Les homéomorphismes se composent et s'inversent

$f \in \mathcal{C}(X,Y)$ homéomorphisme *ssi* f bijective et ouverte *ssi* f bijective et fermée

I intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ f inj *ssi* f strictement monotone $\Rightarrow f$ homéo de I sur $f(I)$

$f_{\lambda,a} : x \mapsto \lambda x + a$ est un homéomorphisme. Une isométrie bijective entre espaces métriques est un homéo

IV. Applications uniformément continues, lipschitziennes

Ce sont des notions métriques : (X,d) et (Y,δ) espaces métriques

$f : X \to Y$ est uniformément continue si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x,x') \in X^2, d(x,x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$

Négation : $\exists \varepsilon > 0 / \forall \eta > 0, \exists (x_\eta, x'_\eta)$ tq $d(x_\eta, x'_\eta) \leq \eta$ et $\delta(f(x_\eta), f(x'_\eta)) \geq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \exists (x_n, x'_n) \in (X^{\mathbb{N}})^2$ tq $d(x_n, x'_n) \to 0$ et $\delta(f(x_n), f(x'_n)) \not\to 0$

Opérations : Combinaison linéaire, composition (mais PAS LE PRODUIT : $x \mapsto x$ UC, $x \mapsto x^2$ non UC)

$f : X \to Y$ est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tq : $\forall (x,y) \in E^2$, $\delta(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)$

k est un rapport de Lipschitz

f lipschitzienne $\Rightarrow$ uniformément continue

$f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{C})$: f lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow f'$ bornée sur I

Fonctions $\alpha-$hölériennes $(\alpha > 0)$: $\exists k > 0 / \forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha$ $\alpha > 1 \Rightarrow cste$

V. Espaces produits

$(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espaces métriques

$E = E_1 \times E_2$ On définit $d \begin{cases} E^2 & \to \mathbb{R}^+ \\ (x_1,x_2),(y_1,y_2) & \mapsto \max(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)) \end{cases}$

La topologie produit de E est celle donnée par la distance d

$B_d((a_1,a_2),r) = B_{d1}(a_1,r) \times B_{d_2}(a_2,r)$

Ω est un pavé ouvert lorsqu'il existe un ouvert U_1 de E_1 et un ouvert U_2 de E_2 tels que $U = U_1 \times U_2$

Tout pavé ouvert de E est ouvert de (E,d). Tout ouvert de (E,d) est réunion de pavés ouverts

F_1, F_2 fermés de $E_1, E_2 \Rightarrow F_1 \times F_2$ fermé de E

/!\ Un ouvert de E n'est pas en général un produit d'ouverts (idem fermé)

On note, pour $i \in \{1,2\}$, $p_i \begin{cases} E_1 \times E_2 \to E_i \\ (x_1,x_2) \mapsto x_i \end{cases}$ la projection de E sur E_i

Les projections sont $1-$lipschitziennes. Elles sont ouvertes (mais en général non fermées $p_x\{xy-1=0\} = \mathbb{R}^*$)

$(x_n) = (x_{1n}, x_{2n}) \in E^{\mathbb{N}}$ $(x_n)_n$ converge $\Leftrightarrow (x_{1n})_n$et (x_{2n}) CV, et dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = (\lim\limits_{n\to+\infty} x_{1n}, \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n})$

$A \subset X$ où X espace topo, $f : X \to E_1 \times E_2$, $f = (f_1, f_2)$ (où $f_i = p_i \circ f$)

f possède une limite en $a \in \overline{A}$ selon $A \Leftrightarrow f_1$ et f_2 possède une telle limite. Alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in A}} f(x) = (\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in A}} f_1(x), \lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in A}} f_2(x))$

f est continue en a (resp sur X) *ssi* f_1 et f_2 sont continues en a (resp sur X)

$f: E_1 \times E_2 \to X$

Les applications partielles de f en $(a_1,a_2) \in E_1 \times E_2$ sont $f(a_1,\bullet)\begin{cases} E_2 \to X \\ x_2 \mapsto f(a_1,x_2) \end{cases}$ $f(\bullet,a_2)\begin{cases} E_1 \to X \\ x_1 \mapsto f(x_1,a_2) \end{cases}$

Si f est continue, ses applications partielles sont continues (Réciproque fausse)

Polynôme à plusieurs indéterminées

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$

Monôme : $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ où les $\alpha_i \in \mathbb{N}$. $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}$

Polynômes : $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha X^\alpha$ où les λ_α sont nuls sauf un nombre fini. (L'écriture est unique)

Addition : sur chaque monôme Produit : distributivité $X^\alpha X^\beta = X^{\alpha+\beta}$

$\mathbb{K}[X_1 \dots X_n]$ est l'ensemble des polynômes : c'est une algèbre commutative de base $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$

(Thm général) A $\mathbb{K}-$algèbre commutative unitaire, $(a_1,\dots,a_n) \in A^n$. Il existe un unique morphisme d'algèbre $f: \mathbb{K}[X_1 \dots X_n] \to A$ tel que $f(1_\mathbb{K}) = 1_A$ et pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f(X_i) = a_i$

$$f\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$$

Degré total d'un monôme : $\deg(X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ Degré partiel d'un monôme : $\deg_{X_i}(X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}) = \alpha_i$

Degré total d'un polynôme $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha X^\alpha$: $\max\{\alpha_1 + \dots + \alpha_n / \alpha \in \mathbb{N}^n, \lambda_\alpha \neq 0\}$

Polynôme homogène : tous les monômes intervenant dans P ont le même degré principal

P s'écrit de manière unique $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n$ avec $(P_n)_n$ suite presque nulle de polynômes homogènes de degré n

Fonct° polynôme attachée à P : $\tilde{P}\begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \\ (x_1 \dots x_n) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \end{cases}$ $\left(\begin{cases} \mathbb{K}[X_1 \dots X_n] \to \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \\ P \mapsto \tilde{P} \end{cases} \text{morphisme d'algèbre}\right)$

$P \in \mathbb{K}[X_1 \dots X_n]$, $\tilde{P}$ est continue

S'il existe des parties infinies $A_1,\dots,A_n$ de $\mathbb{K}$ telles que $\tilde{P}$ s'annule sur $A_1 \times \dots \times A_n$, $P = 0$

VI. Applications linéaires continues

Particularité de la topologie d'un evn : invariance par translation et homothétie

F sev de $(E, \| \ \|)$ $f \neq E \Rightarrow \mathring{F} = \varnothing$ H hyperplan de $E \Rightarrow H$ est soit fermé soit dense

$(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ evn

$\mathcal{L}_C(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{C}(E,F)$ $GL_C(E) = \{u \in GL(E) / u$ et u^{-1} sont continues$\}$

$u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a équivalence entre :

1) u continue sur E 2) u continue en 0 3) u continue en un point au moins

4) u bornée sur $\overline{B}(0,1)$ 5) u bornée sur $S(0,1)$

6) u bornée sur une boule $\overline{B}(a,r)$ $(r>0)$ au moins

7) $\exists k>0 / \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ 8) u est lipschitzienne

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ continue $\Rightarrow \sup\limits_{x\in \overline{B}_E(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup\limits_{x\in S_E(0,1)} \|u(x)\|_F = \min\{k\geq 0 / \forall y \in E, \|u(y)\|_F \leq l\|y\|_E\}$

$\|\|u\|\| = \sup\limits_{x\in \overline{B}_E(0,1)} \|u(x)\|_F$ est la norme d'opérateur/associée/subordonnée de u : c'est une norme sur $\mathscr{L}_C(E,F)$

$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq \|\|u\|\| \|x\|_E$

$\forall (u,v) \in \mathscr{L}_C(E,F)\times\mathscr{L}_C(F,G), \|\|v\circ u\|\|_{E,G} \leq \|\|v\|\|_{F,G} \times \|\|u\|\|_{E,F}$ $\Rightarrow (\mathscr{L}_C(E), \|\| \ \|\|)$ est une algèbre normée

u $\mathscr{C}^\circ \Leftrightarrow \ker u$ fermée

VII. Comparaison des normes

E $\mathbb{K}-ev$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, N_1 et N_2 deux normes sur E

N_2 est plus fine que/domine N_1 si : $\exists c>0$ tq $\forall x \in E, N_1(x) \leq cN_2(x)$

N_1 et N_2 sont équivalentes si : $\exists (c,d) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tq $\forall x \in E, dN_2(x) \leq N_1(x) \leq cN_2(x)$ (relation d'équivalence)

N_2 plus fine que N_1 $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, (x_n)_n \xrightarrow{N_2} 0 \Rightarrow (x_n)_n \xrightarrow{N_1} 0$

N_2 équivalente à $N_1 \Leftrightarrow N_2$ et N_1 ont les mêmes suites convergentes

N_2 est plus fine que N_1 *ssi* tout ouvert pour N_1 est ouvert pour N_2 (idem pour les fermés)

Deux normes équivalentes donnent la même topologie

On admet pour l'instant : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

VIII. Compacité

(X,d) espace métrique

(X,d) est compact si, de toute suite de points de X, on peut extraire une sous-suite convergente dans X

Si $A \subset E$ em : A compacte $\Leftrightarrow \forall u \in A^{\mathbb{N}}, \exists a \in A$ et φ extraction tq : $u_{\varphi(n)} \to a$

A partie compacte de $(E, \| \ \|) \Rightarrow A$ est fermée bornée

$(E, \| \ \|)$ evn compact : $Y \subset E$ compacte pour $d_Y \Leftrightarrow Y$ fermée

(X,d) em compact $\Rightarrow X$ complet

(F_n) suite décroissante de fermés de l'espace compact $X \Rightarrow$ $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, F_n \neq \varnothing$

$\forall n$, on prend $u_n \in F_n$ X compact $\Rightarrow u_{\varphi(n)} \to a. \forall n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N \Rightarrow u_{\varphi(n)} \in F_N$ fermé: $a \in \bigcap F_N$

(X_1,d_1) et (X_2,d_2) espaces compacts $\Rightarrow (X_1 \times X_2, d)$ est compact

$A \subset (\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty) \Rightarrow$ A compacte *ssi* A fermée bornée

$A \subset E, N_1$ et N_2 normes équivalentes. A compacte de $(E,N_1) \Leftrightarrow A$ compacte de (E,N_2)

(X,d) espace métrique compact, $u \in X^{\mathbb{N}}$ u converge $\Leftrightarrow u$ possède au plus une valeur d'adhérence

(X,d) et (Y,δ) espaces métriques, $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ Si X compacte, $f(X)$ est compacte

Soit X espace métrique compact non vide :

1. Si $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, f est bornée et atteint ses bornes
2. Si $g \in \mathcal{C}(X,E)$, E evn $\Rightarrow \exists a \in X$ tq $\|g(a)\| = \sup_{x\in E}\|f(x)\|$

(*Théorème de Heine*) X et Y espaces métriques, avec X compact :

Toute application continue $f : X \to Y$ est uniformément continue

Par l'absurde : f non UC $\Rightarrow d(x_n, x_n') \to 0$, et $\delta(f(x_n), f(x'_n)) \geq \alpha$ $x_{\varphi(n)} \to a \in X \Rightarrow f(x_n) \to f(a), f(x'_n) \to f(a)$ NON

Même résultat sur $\mathbb{R}$ si f périodique continue ou f continue avec limites en $+\infty$ et $-\infty$

Compléments

(X,d) espace métrique compact, $\rho > 0$. Il existe une partie finie A de X telle que $X = \bigcup_{a\in A} B_d(a,\rho)$

P.abs : supp $\forall A \subset X$ finie, $X \neq \bigcup_{a\in A} B(a,\rho) \Rightarrow a_0 \in X : X \neq B(a_0,\rho) \Rightarrow a_0 \in X \setminus B(a_0,\rho)$...

(a_n) vérifie : $\forall m > n, d(a_m, a_n) > \rho$: extraction DV:NON

//HP// L'espace topologique X vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue (BL) lorsque :

$\forall (\omega_i)_{i\in I}$ famille d'ouverts de X tels que $X = \bigcup_{i\in I} \omega_i$, il existe $J \subset I$ finie telle que $X = \bigcup_{i\in J} \omega_i$

(ie : de tout recouvrement de X on peut extraire un recouvrement fini)

(I) $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} \Rightarrow$ L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Adh\{u_p, p \geq n\}$ toujours fermé

$a \in A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, a \in B(a,\varepsilon) \cap \{x_m, m \geq n\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a \in \overline{\{x_m, m \geq n\}}$

X vérifie BL, (F_n) suite décroissante de fermés non vides $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$

Sinon, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus F_n = X$. $BL \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} / X = \bigcup_{n\in [\![0,N]\!]} X \setminus F_n \Rightarrow \varnothing = \bigcap_{n\in [\![0,N]\!]} F_n = F_N$ NON

Lemme de Lebesgue : $(\Omega_i)_{i\in I}$ recouvrement ouvert de X (compact) $\Rightarrow \exists \rho > 0 / \forall x \in X, \exists i \in I / B(x,\rho) \subset \Omega_i$

p.abs: $\forall \rho = \frac{1}{n} > 0, \exists x_n \in X, \forall i \in I, B(x_n,\rho) \not\subset \Omega_i : (x_{\varphi(n)}) \to a \Rightarrow \exists i_0 \in I, a \in \Omega_{i_0}$ ouvert: $\exists \varepsilon / B(a,\varepsilon) \subset \Omega_{i_0}$

n tq $\frac{1}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{2} : d(x_{\varphi(n)}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \subset B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B(a,\varepsilon) \subset \Omega_{i_0}$ contradiction

//HP// Théorème de Borel-Lebesgue : X (espace métrique) compact $\Leftrightarrow X$ vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue

$\Leftarrow$ Si X vérifie $BL : (u_n) \in X^{\mathbb{N}}, F_n = \overline{\{u_m, m \geq n\}}$ suite $\downarrow$ fermés non vide: $A_H = \bigcap F_n \neq \varnothing \Rightarrow (u_n)$ possède une va

$\Rightarrow (\Omega_i)_{i\in I}$ recouvrement de $X, \rho > 0 / \forall x, \exists i \in I, B(x,\rho) \subset \Omega_i$ thm $\Uparrow$: recouvrement fini de boules $B(x_i,\rho) \subset \Omega_{i_k} \Rightarrow OK$

Utilité : Passage du local au global

IX. Espaces vectoriels normés de dimension finie

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie

N norme sur $\mathbb{R}^n$: N est continue pour la topologie produit
N est équivalente à $\|\ \|_\infty$

$(\varepsilon_1 ... \varepsilon_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$: $N(X-Y)\leq\|x-y\|_\infty\sum N(\varepsilon_i)\Rightarrow N$ $k-$lip $\Rightarrow\mathcal{C}^\circ$

$S=\{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|_\infty=1\}$ compact pour $\|\ \|_\infty . x\mapsto N(x)$ $\mathcal{C}^0$ sur $S\Rightarrow$ borné et atteint ses bornes $\alpha<\beta\Rightarrow\alpha\leq N\left(\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right)\leq\beta$

Sur E, toutes les normes sont équivalentes

Idée : choisir une norme adaptée au problème posé

$A\subset E$ (de dim finie) : A compacte $\Leftrightarrow$ A fermée bornée

Les boules fermées sont compactes

$(E,\|\ \|)$ *evn* de dimension finie $\Rightarrow E$ est complet

$^{(I)}(E,\|\ \|)$ evn (de dim qcq) F sev de E de dimension finie $\Rightarrow F$ est fermé dans E

E,F evn. Si <u>E est de dimension finie</u>, $\mathcal{L}(E,F)\subset\mathcal{C}(E,F)$ (Utiliser N_∞)

$(E,\|\ \|_E)$ evn de dim finie : $u:(E,\|\ \|_E)\to(F,\|\ \|_F)$ $\exists x\in\overline{S_E}(0,1)$ tq $\|u(x)\|_F=\|\!|u|\!\|$

Si F est de dimension finie aussi, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dim finie et $\overline{B}=\{u\in\mathcal{L}(E,F),\|\!|u|\!\|\leq1\}$ est compact

E evn de dim finie, de base $(e_1...e_n)$

$(x_k)_k=\left(\sum_{i=1}^n x_{ik}e_i\right)_k\in E^{\mathbb{N}}$ CV *ssi* $\forall i\in\ 1,n\ ,(x_{ik})_k$ CV. Dans ce cas, $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\sum_{i=1}^n(\lim\limits_{k\to+\infty}x_{ik})e_i$

Résultat analogue pour les limites de fonction, et les fonctions continues

F evn de dim finie de l'evn $(E,\|\ \|)$ $\forall x\in E,\exists a\in F;\|x-a\|=d(x,F)$

Thm de Ricsz : E de dim $\infty\Rightarrow\exists(x_n)\in E^{\mathbb{N}},\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $\|x_n\|=\|x_m\|=1$ et $m\neq n\Rightarrow\|x_n-x_m\|\geq1$ Z

$\overline{B}(0,1)$ compacte $\Rightarrow E$ de dimension finie

Enveloppe convexe : $\Gamma(A)=\bigcap\limits_{\text{convexe } C\supset A}C=\{x\in E\,/\,\exists(a_0...a_n)\in A^{n+1},\exists(\lambda_0...\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\,/\sum_{i=0}^n\lambda_i=1$ et $x=\sum_{i=0}^n\lambda_ia_i\}$

Thm séparation : $C\neq\varnothing$ cvxe fermé de $\mathbb{R}^n$ euclidien : $\forall x\in E,\exists!\,p\in C$ tq $\|x-p\|_2=d(x,C)$ et $\forall q\in C,\langle x-p\,|\,q-p\rangle\leq0$

X. Espaces complets

L'espace métrique (X,d) est complet lorsque toute suite de Cauchy de X converge (dans X)

(X_1,d_1) et (X_2,d_2) em complets $\Leftrightarrow(X_1\times X_2,d)$ est complet

X em : $A\subset X$ complète $\Rightarrow A$ fermée || A fermée dans X em complet $\Rightarrow A$ est complète

Critère de Cauchy : $A \subset E, a \in \overline{A}$ et $f : A \to (X,d)$

f admet une limite en a selon $A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (u,v) \in (B(a,\eta) \cap A)^2, d(f(u), f(v)) \leq \varepsilon$

C'est une condition suffisante si X est complet

$(a,b) \in \mathbb{R}^2, f :]a,b[\to \mathbb{R}^p$ f' bornée au voisinage de $a \Rightarrow f$ possède une limite en a

$f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ $\int_a^{+\infty} f$ CV $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 / \forall x, y > M \left| \int_x^y f \right| \leq \varepsilon$

$(X,d),(Y,\delta)$ evn avec (Y,δ) complet, $f : A \to Y$ fonction UC. $\overline{A} = X \Rightarrow \exists ! g : X \to Y$ tq $g_{\backslash A} = f$. g est UC

$a \in B(x,\eta/2) \subset A, d(a,b) < \eta \Rightarrow \delta(f(b), f(a)) < \varepsilon \Rightarrow$ Crit. Cauchy. Y complet : f possède lim $g(x)$ en x (unique par PPI)

UC : $(x,y) \in X^2, d(x,y) \leq \eta/2$. a_n, b_n tq $a_n \to x, b_n \to y$. $\mathcal{C}^\circ$ de $d \Rightarrow d(a_n,b_n) < \eta$ apcr $\Rightarrow \delta(f(a_n), f(b_n)) \leq \varepsilon \Rightarrow \delta(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$

C. part : X, Y evn, Y complet, A dense dans X. $f : A \to Y$ lin et continue $\Rightarrow f$ lip, UC, et g linéaire, avec $\|g\| = \|f\|$

Un evn $(E, \| \ \|)$ complet est appelé espace de Banach

Tout evn de dim finie est complet.

X ensemble, $(F, \| \ \|_\infty)$ de Banach : $B(X,F) = \{f : X \to F$ bornée$\}$ est complet pour $\| \ \|_\infty$

$f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}, a \in X$: Supp $\exists U \in \mathcal{V}(a), \exists f : U \to \mathbb{C}$, et $(f_{n\backslash V})_n \xrightarrow{CVU} f_{\backslash V}$ f est continue en a

$\Rightarrow (\mathcal{C}_b(X,\mathbb{C}), \| \ \|_\infty) = \mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \cap B(X,\mathbb{C})$ est complet

E, F evn, F de Banach $\Rightarrow (\mathcal{L}_C(E,F), \| \ \|)$ est complet

Plan pour montrer la complétude d'un espace de fonctions : $I.CVS$ $II.\lim$ dans l'espace $III.CV$ pour la norme

$^{//HP//} l^1(\mathbb{N}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|$ CV$\}$ $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ $(l^1(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$ est un espace de Banach

$(E, \| \ \|)$ evn : la série $\sum x_n$ à termes dans E est absolument convergente lorsque $\sum \|x_n\|$ converge

Normalement convergent : convergent pour $\| \ \|_\infty$ (dans les espaces de fonctions)

Si E n'est pas complet, une série peut être ACV et non CV

$^{//HP//}(E, \| \ \|)$ evn : E complet $\Leftrightarrow$ Toute série ACV de E converge

E espace de Banach : $GL_C(E) = \{u \in \mathcal{L}_C(E) / \exists v \in \mathcal{L}_C(E), u \circ v = v \circ u = Id_E\}$

$^{//HP//}$ $u \in \mathcal{L}_C(E) : \|u\| < 1 \Rightarrow Id_E + u \in GL_C(E)$

$GL_C(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_C(E)$, et $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $\mathcal{L}_C(E)$

Compléments

$^{//HP//(I)}$Théorème du point fixe (Picard) : (X,d) em, $A \subset X$, $f : A \to X$

$A \neq \varnothing$, A complète, $f(A) \subset A$ et f strictement contractante $\Rightarrow \exists ! l \in A, f(l) = l$

Dans ce cas, si $u_0 \in A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow (u_n)_n$ CV vers l

Lemme de Baire : F_n suite décroissante de fermés de l'espace complet (E,d) $(x_n \in F_n + \text{Cauchy})$

Si la suite $(\operatorname{diam} F_n)_n$ tend vers 0, il existe $a \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}$

Théorème de Baire : $(\Omega_n)_n$ suite d'ouverts denses de l'espace métrique complet (E,d)

Alors $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E

ω ouvert de E : $a_0 \in \omega, r_0 > 0$ tq $\overline{B}(a_0,r_0) \subset \Omega_0 \cap \omega, \dots, a_{j+1} \in B(a_j,r_j), r_{j+1} < \frac{r_j}{2}$

tq $\overline{B}(a_{j+1},r_{j+1}) \subset B(a_0,r_0) \cap \dots \cap B(a_j,r_j) \cap \omega$ Lemme de Baire $(r_n \to 0)$: $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{B}(a_j,r_j) = \{a\} \subset A \cap \omega$

Un résiduel est une intersection dénombrable d'ouverts denses

Espace de Baire : espace vérifiant : tout résiduel est dense

$(G_n)_n$ famille de fermés de (E,d). Si tous les G_n sont d'intérieur vide, alors $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ est d'intérieur vide

XI. Applications multilinéaires continues

$(E,\| \ \|_E)$, $(F,\| \ \|_F)$ et $(G,\| \ \|_G)$ 3 evn

φ application bilinéaire de $E \times F$ dans G. φ continue $\Leftrightarrow \exists C > 0, \forall (x,y) \in E \times F$, $\|\varphi(x,y)\|_G \le C\|x\|_E \times \|y\|_F$

$E_1 \dots E_p, G$ de dimensions finies. Toute application multilinéaire $\varphi : E_1 \times \dots \times E_p \to G$ est continue

XII. Connexité

E espace topologie. On a équivalence entre :

- (i) Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de E tq $E = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, alors l'un des deux est vide
- (ii) Si F_1 et F_2 sont deux fermés de E tq $E = F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, alors l'un des deux est vide
- (iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E
- (iv) Toute fonction continue $f : E \to \{0,1\}$ est constante $(f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{0\}))$ part° fermée

On dit alors que E est connexe

(E,d) em. A connexe $\Rightarrow \overline{A}$ connexe

$(A_i)_{i\in I}$ famille de parties connexes de E. Si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe Utiliser (iv)

$^{//HP//}$ Composantes connexes : $a \in E$, $C(a) = \bigcup_{a\in C_i \text{ connexe de } E} C_i$ est connexe : c'est le plus grand connexe contenant a

$f \in \mathcal{C}(E,F)$, A partie connexe de $E \Rightarrow f(A)$ est connexe dans F

$A \subset \mathbb{R}$. A est connexe *ssi* c'est un intervalle

$A \subset E$ est connexe par arcs lorsque pour tout $(a,b) \in A^2$, il existe $\gamma_{ab} \in \mathcal{C}([0,1],A)$

tel que $\gamma_{ab}([0,1]) \subset A$, $\gamma_{ab}(0) = a$ et $\gamma_{ab}(1) = b$

A connexe par arcs $\Rightarrow A$ connexe || L'image continue d'une partie connexe par arcs est connexe

Le produit de deux parties connexes par arcs est connexe par arcs

E evn et A ouvert de $E \Rightarrow A$ connexe *ssi* A connexe par arcs polygonaux

$1: A=\bigcup_{b\in A}\gamma_{ab}([0,1])$ est une union de connexe ayant un point commun $4: a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow \exists\gamma_{ab}:[0,1]\to A$ affine par morc.

$\mathfrak{R}$ Rel d'équiv. Classes d'équiv ouvertes (car A ouverte) A connexe $\Rightarrow$ une seule classe d'équiv

$\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs (cercles passant par a,b,r avec $r\in\mathbb{Q}^2\Rightarrow$ nb dén, or cercles passant par a,b non den)

(X,d) em, $f\in\mathcal{C}(X,Y)$ Si f est localement constante et X est connexe, alors f est constante

I intervalle de $\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ f injective $\Leftrightarrow f$ strictement croissante

$C=\{(x,y)\in I^2 / x<y\}$ $\varphi:\begin{cases} C\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\end{cases}\in\mathcal{C}(C,\mathbb{R})$ f inj $\Rightarrow \varphi(C)\subset\mathbb{R}^*$, et $\varphi(C)$ connexe...