Chap 23 : Séries de Fourier

I. Préliminaires : Polynômes trigonométriques

$\mathcal{T} = Vect_{\mathbb{C}}(e^{ik\bullet})_{k\in\mathbb{Z}}$, c'est une algèbre dont $(e^{ik\bullet})_{k\in\mathbb{Z}} = (e_k)$ est une base vectorielle : $e_k e_l = e_{k+l}$

Pour $(P,Q)\in\mathcal{T}^2$, $\langle P\,|\,Q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{P(t)}Q(t)dt$, c'est un ps hermitien sur $\mathcal{T}$ pour lequel (e_k) est une BON

Tout poly trogonométrique s'écrit alors $P = c_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos(k\bullet)+\beta_k\sin(k\bullet))$

Pour $k\in [\![1,n]\!]$, $\langle\cos(k\bullet)\,|\,P\rangle = \frac{\alpha_k}{2}, \langle\sin(k\bullet)\,|\,P\rangle = \frac{\beta_k}{2}$ et $\int_0^{2\pi}P = c_0$

$$\left\langle \sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e^{ik\bullet} \,\middle|\, \sum_{k=-n}^{n}\mu_k e^{ik\bullet}\right\rangle = \sum_{k=-n}^{n}\overline{\lambda_k}\mu_k$$

$$\left\langle c_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos(k\bullet)+\beta_k\sin(k\bullet)) \,\middle|\, c'_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha'_k\cos(k\bullet)+\beta'_k\sin(k\bullet))\right\rangle = \overline{c_0}c'_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\alpha'_k+\overline{\beta_k}\beta'_k$$

Noyaux : de Dirichlet : $D_n(t) = \sum_{k=-N}^{N}e^{ikt} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}$, de Fejer : $K_N = \frac{1}{N+1}(D_0+\ldots+D_N) = \frac{\sin^2\frac{N+1}{2}t}{(N+1)\sin^2\frac{t}{2}}$ (rec)

$P\in\mathcal{T}$, et $\forall t\in\mathbb{R}, P(t)\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists Q\in\mathcal{T}, P=\overline{Q}Q$ $\quad(P=e^{-iNt}f(e^{it}),\ f\in\mathbb{C}[X]\Rightarrow$ zéros de f ?

$conj \to z\in\mathbb{C}, z^{2N}\overline{f}\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$, mêmes mult, $f = \frac{C}{\prod|z_k|}\prod|e^{it}-z_k\|e^{-it}-\overline{z_k}|\ldots)$

$f\in\mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^k$ par morceaux si : $\exists\{x_k\}$ subdiv° tq $\forall k$, $f_{|]x_k;x_{k+1}[}$ possède un prolongement $\mathcal{C}^k$ sur $[x_k;x_{k+1}]$

Rappel : Si f et g sont $\underline{\mathcal{C}^0}$ et $\underline{\mathcal{C}^1_{pm}}$, en notant pour $h\in\{f,g\}$, $\tilde{h}: t\mapsto\frac{1}{2}(h'(t^+)+h'(t^-))$ $\int_a^b f\tilde{g} = [fg]_a^b - \int_a^b \tilde{f}g$

Si non continues, il apparait des masses de Dirac

II. Coefficients de Fourier

$f\in\mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ T-périodique. On lui associe des coefficients de Fourier :

– complexes : $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}dt$

– réels : $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$, $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$ et $\frac{a_0}{2} = c_0(f)$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $c_k(f) = \frac{1}{2}(a_k(f)-ib_k(f))$ $\qquad c_{-k}(f) = \frac{1}{2}(a_k(f)+ib_k(f))$

Désormais, $T = 2\pi$

Les coeffs s'obtiennent en intégrant sur n'importe quel intervalle de longueur 2π

Si f est impaire, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $a_k(f)=0$ Si f est paire, $b_k(f)=0$ (intégration sur $[-\pi,\pi]$)

Translations : pour $h\in\mathbb{R}, f_h=\tau_h(f):t\mapsto f(t+h)\quad \forall n\in\mathbb{Z}, c_n(f_h)=e^{inh}c_n(f)$

Ordre de grandeur : $\forall n\in\mathbb{Z}, |c_n(f)|\le\|f\|_\infty$ et $|c_n(f)|\le\|f\|_1\Rightarrow c_n$ est continue pour $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$

Si $f\in\mathcal{C}_{2\pi}^{pm}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\lim\limits_{|n|\to+\infty} c_n(f)=0$ (Riemann-Lebesgue ou Bessel)

Si $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n\ge1}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ CVU de somme f, $\frac{a_0}{2}=c_0(f)$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f)=a_n$ et $b_n(f)=b_n$

$^{(I)}r\in]0,1[,\ P_r(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}r^{|n|}e^{int}$ CVN à r fixé, et $P_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$: $c_n(P_r)=r^{|n|},\ a_n(P_r)=2r^n,\ a_0(P_r)=1$

$f\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})\ \mathcal{C}_{pm}^1$ de dérivée généralisée $\tilde{f}\quad \forall n\in\mathbb{Z}^*, c_n(f)=\frac{1}{in}c_n(f')$

Si f est $\mathcal{C}^p$, $c_n(f)=o(1/n^p)$

$^{//HP//}\ f,g\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), f\star g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)g(t)dt\Rightarrow\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f\star g)=c_n(f)c_n(g)$

III. Point de vue préhilbertien

$\mathbb{D}=\left\{f\in\mathcal{C}_{2\pi}^{pm}(\mathbb{R},\mathbb{C})\,/\,\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))\right\}$. Sur $\mathbb{D}$, $\langle f|g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f}g$ est un ps hermitien

$Vect(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}=\mathcal{T}$ est dense dans $\mathbb{D}$ pour $\|\ \|_2$

$f\in\mathbb{D}: c_n(f)=\langle e_n|f\rangle\Rightarrow S_N(f)=\sum\limits_{k=-N}^{N}c_k(f)e_k$ est la proj. orth. de f sur $\mathcal{T}$ (minimise la dist. euclidienne)

$(S_N(f))_N$ CV vers f pour $\|\ \|_2$ $\quad\|\quad$ $\sum|c_n(f)|^2$ CV et $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=\|f\|_2^2\left(=\frac{a_0^{\,2}}{4}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n^{\,2}+b_n^{\,2})\right)$

$f,g\in\mathbb{D}:\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\overline{c_n(f)}c_n(g)$ CV de somme $\langle f|g\rangle$

Déterminer une série de Fourier $\rightarrow$ Dessiner sur plusieurs périodes,
$\rightarrow$ faire attention aux intervalles de validité des formules

$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ sur $]0,2\pi[, f(0)=0\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)$ $\quad\|\quad$ $f\in\mathcal{C}_{2\pi}^1$ tq $\int_0^{2\pi}f=0\Rightarrow\int_0^{2\pi}|f|^2\le\int_0^{2\pi}|f'|^2$

f et $g\in\mathbb{D}$: $\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f)=c_n(g)\Rightarrow f=g$ (sur $\mathcal{C}_{2\pi}^{pm}\rightarrow$ à un nombre fini de points près)

Si $f\in\mathbb{D}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{inx}$ CVU, alors $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(f)e^{inx}$

IV. Convergence simple et uniforme

$f\in\mathbb{D}$: $\forall x\in\mathbb{R},\ S_N(f)(x)=f\star D_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right)dt$

Théorèmes de Dirichlet : $f\in\mathbb{D},\underline{\mathcal{C}_{pm}^1}$. $\forall x\in\mathbb{R}, S_N(f)(x)\xrightarrow{N\to+\infty}f(x)$ $\left(\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))\text{ si } f\ \mathcal{C}_{pm}\right)$

//HP// $f \in \mathbb{D}$, $\mathcal{C}^\circ$ et $\mathcal{C}^1_{pm}$. Alors la série de Fourier de f CVN vers f $\left(|c_n(f)| = \left|\frac{1}{n} c_n(\tilde{f})\right| \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(\tilde{f})|^2 + \frac{1}{n^2}\right)\right)$

Pour $f(x) = (\pi - x)/2$, pas de CVN...

//HP// Divergence des séries de Fourier :

Thm de Banach-Steinbauss : E espace de Banach, $(u_i)_{i\in I} \in \underline{\mathcal{L}}_C(E)$. On a l'alternative :

$\exists A$ dense dans E tq $\forall x \in A$, $\sup\limits_{i\in I} |u_i(x)| = +\infty$ ou $\exists M > 0, \forall i \in I, \|u_i\| < M$

$E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de $\| \|_\infty$. $u_n : f \mapsto S_n(f)(0)$ $\|u_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

$\Rightarrow \exists A \subset E$, dense dans E tq : $\forall f \in A$, $\sup |u_n(f)| = +\infty$

Féjer : $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$ – $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\sigma_n(f) = F_n \star f(x)$ où $K_n(t) = \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{(n+1)\sin(t/2)}$

– $\sigma_n(f)$ CVU vers f sur $\mathbb{R}$ (K_N CVU vers 0 hors sur $]-\pi,-\delta[\ldots$, f UC $\to$ maj de $|f - \sigma_n(f)|$)

$f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $a \in \mathbb{R}$ Si $S_n(f)(a)$ CV $\Rightarrow$ CV vers $f(a)$ (Cesaro sur σ_n)

$\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(f) \geq 0 \Rightarrow f$ dvp en série de Fourier (Si $S_n(f)(0) = \sum c_k(f) \nearrow$ DV, $\sigma_n(f)$ aussi $\Rightarrow$ non:CVN)

V. Méthodes et applications

Parseval sert partout

Développement en série de Fourier :

– Calcul direct – Fractions rationnelles (et exponentielle)

– PS avec une autre SF – Intégrale à param. et décalage d'intervalles d'int° (périodicité)

Séries entières et fonctions analytiques : Appliquer à $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$

$|f(0)|$ max local de $|f|: z \mapsto \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right|$ $\Rightarrow f$ constante (coeff sous forme d'intégrale, unicité de Fourier)

Equations fonctionnelles : convolutions, translations...

Equations différentielles