

# Chap 23 : Séries de Fourier

## I. Préliminaires : Polynômes trigonométriques

$\mathcal{T} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(e^{ik\bullet})_{k \in \mathbb{Z}}$ , c'est une algèbre dont  $(e^{ik\bullet})_{k \in \mathbb{Z}} = (e_k)$  est une base vectorielle :  $e_k e_l = e_{k+l}$

Pour  $(P, Q) \in \mathcal{T}^2$ ,  $\langle P | Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(t)} Q(t) dt$ , c'est un ps hermitien sur  $\mathcal{T}$  pour lequel  $(e_k)$  est une BON

Tout poly trogonométrie s'écrit alors  $P = c_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(k\bullet) + \beta_k \sin(k\bullet))$

Pour  $k \in 1, n$ ,  $\langle \cos(k\bullet) | P \rangle = \frac{\alpha_k}{2}$ ,  $\langle \sin(k\bullet) | P \rangle = \frac{\beta_k}{2}$  et  $\int_0^{2\pi} P = c_0$

$$\left\langle \sum_{k=-n}^n \lambda_k e^{ik\bullet} \middle| \sum_{k=-n}^n \mu_k e^{ik\bullet} \right\rangle = \sum_{k=-n}^n \overline{\lambda_k} \mu_k$$

$$\left\langle c_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(k\bullet) + \beta_k \sin(k\bullet)) \middle| c'_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha'_k \cos(k\bullet) + \beta'_k \sin(k\bullet)) \right\rangle = \overline{c_0} c'_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \alpha'_k + \overline{\beta_k} \beta'_k$$

Noyaux : de Dirichlet :  $D_n(t) = \sum_{k=-N}^N e^{ikt} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$ , de Fejer :  $K_N = \frac{1}{N+1} (D_0 + \dots + D_N) = \frac{\sin^2 \frac{N+1}{2} t}{(N+1) \sin^2 \frac{t}{2}}$  (rec)

$P \in \mathcal{T}$ , et  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists Q \in \mathcal{T}, P = \overline{Q}Q$  ( $P = e^{-iNt} f(e^{it})$ ,  $f \in \mathbb{C}[X] \Rightarrow$  zéros de  $f$  ?)

$$\text{conj} \rightarrow z \in \mathbb{C}, z^{2N} \overline{f\left(\frac{1}{z}\right)} = f(z), \text{ mêmes mult, } f = \frac{C}{\prod |z_k|} \prod (e^{it} - z_k) \prod (e^{-it} - \overline{z_k} | \dots)$$

$f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est  $\mathcal{C}^k$  par morceaux si :  $\exists \{x_k\}$  subdiv<sup>o</sup> tq  $\forall k, f|_{]x_k; x_{k+1}[}$  possède un prolongement  $\mathcal{C}^k$  sur  $[x_k; x_{k+1}]$

Rappel : Si  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}_{pm}^1$ , en notant pour  $h \in \{f, g\}$ ,  $\tilde{h} : t \mapsto \frac{1}{2}(h'(t^+) + h'(t^-))$   $\int_a^b f \tilde{g} = [fg]_a^b - \int_a^b f \tilde{g}$

Si non continues, il apparait des masses de Dirac

## II. Coefficients de Fourier

$f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$   $T$ -périodique. On lui associe des coefficients de Fourier :

– complexes :  $n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in \frac{2\pi}{T} t} dt$

– réels :  $n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt, b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$  et  $\frac{a_0}{2} = c_0(f)$

Pour  $k \in \mathbb{N}^*, c_k(f) = \frac{1}{2}(a_k(f) - ib_k(f)) \quad c_{-k}(f) = \frac{1}{2}(a_k(f) + ib_k(f))$

Désormais,  $T = 2\pi$

Les coeffs s'obtiennent en intégrant sur n'importe quel intervalle de longueur  $2\pi$

Si  $f$  est paire,  $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k(f) = 0$  Si  $f$  est impaire,  $b_k(f) = 0$  (intégration sur  $[-\pi, \pi]$ )

Translations : pour  $h \in \mathbb{R}, f_h = \tau_h(f) : t \mapsto f(t+h) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f_h) = e^{inh} c_n(f)$

Ordre de grandeur :  $\forall n \in \mathbb{Z}, |c_n(f)| \leq \|f\|_\infty$  et  $|c_n(f)| \leq \|f\|_1 \Rightarrow c_n$  est continue pour  $\| \cdot \|_\infty$  et  $\| \cdot \|_1$

Si  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , alors  $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$

Si  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  CVU de somme  $f$ ,  $\frac{a_0}{2} = c_0(f)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = a_n$  et  $b_n(f) = b_n$

$(^1) r \in ]0, 1[, P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$  CVN à  $r$  fixé, et  $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} : c_n(P_r) = r^{|n|}, a_n(P_r) = 2r^n, a_0(P_r) = 1$

$f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mathcal{C}_{pm}^1$  de dérivée généralisée  $\tilde{f} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$

Si  $f$  est  $\mathcal{C}^p, c_n(f) = o(1/n^p)$

//HP//  $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g)$

### III. Point de vue préhilbertien

$\mathbb{D} = \left\{ f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) \right\}$ . Sur  $\mathbb{D}, \langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f} g$  est un ps hermitien

$\text{Vect}(e_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \mathcal{T}$  est dense dans  $\mathbb{D}$  pour  $\| \cdot \|_2$

$f \in \mathbb{D} : c_n(f) = \langle e_n | f \rangle \Rightarrow S_N(f) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k$  est la proj. orth. de  $f$  sur  $\mathcal{T}$  (minimise la dist. euclidienne)

$(S_N(f))_N$  CV vers  $f$  pour  $\| \cdot \|_2 \quad \| \sum |c_n(f)|^2$  CV et  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 \left( = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$

$f, g \in \mathbb{D} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g)$  CV de somme  $\langle f | g \rangle$

Déterminer une série de Fourier  $\rightarrow$  Dessiner sur plusieurs périodes,

$\rightarrow$  faire attention aux intervalles de validité des formules

$f(x) = \frac{\pi-x}{2}$  sur  $]0, 2\pi[, f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \quad \| \quad f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1 \text{ tq } \int_0^{2\pi} f = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2$

$f$  et  $g \in \mathbb{D} : \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g) \Rightarrow f = g \quad (\text{sur } \mathcal{C}_{2\pi}^{pm} \rightarrow \text{à un nombre fini de points près})$

Si  $f \in \mathbb{D}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$  CVU, alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$

### IV. Convergence simple et uniforme

$f \in \mathbb{D} : \forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) = f \star D_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \right) dt$

Théorèmes de Dirichlet :  $f \in \mathbb{D}, \mathcal{C}_{pm}^1. \forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x) \quad \left( \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) \text{ si } f \in \mathcal{C}_{pm} \right)$

//HP//  $f \in \mathbb{D}, \mathcal{C}^\infty$  et  $\mathcal{C}_{pm}^1$ . Alors la série de Fourier de  $f$  est normalement convergente de somme  $f$

Pour  $f(x) = (\pi - x) / 2$ , pas de CVN...

//HP// Divergence des séries de Fourier :

Thm de Banach-Steinbauss :  $E$  espace de Banach,  $(u_i)_{i \in I} \in \underline{\mathcal{L}}_C(E)$ . On a l'alternative :

$$\exists A \text{ dense dans } E \text{ tq } \forall x \in A, \sup_{i \in I} |u_i(x)| = +\infty \quad \text{ou} \quad \exists M > 0, \forall i \in I, \|u_i\| < M$$

$$E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ muni de } \|\cdot\|_\infty. u_n : f \mapsto S_n(f)(0) \quad \|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \exists A \subset E, \text{ dense dans } E \text{ tq } : \forall f \in A, \sup |u_n(f)| = +\infty$$

Féjer :  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f) - \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \sigma_n(f) = F_n \star f(x)$  où  $K_n(t) = \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{(n+1)\sin(t/2)}$   
 -  $\sigma_n(f)$  CVU vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$

$f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), a \in \mathbb{R}$  Si  $S_n(f)(a)$  CV  $\Rightarrow$  CV vers  $f(a)$  (Cesaro sur  $\sigma_n$ )

$\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(f) \geq 0 \Rightarrow f$  dvp en série de Fourier (Si  $S_n(f)(0) = \sum c_k(f) \nearrow$  DV,  $\sigma_n(f)$  aussi  $\Rightarrow$  non:CVN)

## V. Méthodes et applications

Parseval sert partout

Développement en série de Fourier :

- Calcul direct
- Fractions rationnelles (et exponentielle)
- PS avec une autre SF
- Intégrale à param. et décalage d'intervalles d'int° (périodicité)

Séries entières et fonctions analytiques : Appliquer à  $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$

$|f(0)|$  max local de  $|f| : z \mapsto \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right| \Rightarrow f$  constante (coeff sous forme d'intégrale, unicité de Fourier)

... holomorphe

Equations fonctionnelles : convolutions, translations...

Equations différentielles