Chap 22 : Espaces préhilbertiens

E, F $\mathbb{C}-$ev, $u \in \mathscr{L}(E,F)$

Préliminaires : applications semi-linéaires

u est semi-linéaire lorsque : $\forall (x,y) \in E^2$, $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E$, $u(\lambda x) = \overline{\lambda} u(x)$

u et v semi-linéaires $\Rightarrow \alpha u + \beta v$ aussi — $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont des sev

Les propriétés relatives aux bases se préservent ($\lambda \leftarrow \overline{\lambda}$) : E de dim finie $\Rightarrow \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E$

Représentation matricielle : $u : X \mapsto A\overline{X}$ — $v \circ u : X \mapsto B\overline{A}X$

I. Généralités

$f : E \times E \mapsto \mathbb{C}$ est une forme sequilinéaire ($3/2-$linéaire) lorsque :

$\forall x \in E, f(x, \bullet)$ est linéaire — $\forall y \in E, f(\bullet, y)$ est semi-linéaire

f est
- hermitienne si, de plus, $\forall (x,y) \in E \times E, f(y,x) = \overline{f(x,y)}$ $\quad (f(x,x) \in \mathbb{R})$
- hermitienne positive si, de plus, $\forall x \in E, f(x,x) \in \mathbb{R}^+$
- définie positive si, de plus, $\forall x \in E, f(x,x) \in \mathbb{R}_+^*$

Une forme hermitienne définie positive est alors un produit scalaire hermitien, on note $\langle x \mid y \rangle = f(x,y)$

$(E, \langle \mid \rangle)$ est un espace préhilbertion complexe, on note $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$

f hermitienne $\Rightarrow \forall (\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E, f(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 f(x,x)$

$\Rightarrow f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2\operatorname{Re}(f(x,y)) + f(y,y)$

$E = \mathbb{C}^n$ psh canonique : $\langle X \mid Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ $\quad\|\quad$ $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{C}), \langle f \mid g \rangle = \int_a^b \overline{f} g$

$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum |x_n|^2 < +\infty\}, \langle X \mid Y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$

I intervalle de $\mathbb{R}$, $L^2(I) = \{f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C}) / |f|^2$ int. sur $I\}$ $\quad \langle f \mid g \rangle = \int_I \overline{f} g$

Cauchy-Schwarz : $(x,y) \in E^2$, $|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ avec égalité *ssi* $\exists \lambda \in \mathbb{C}, x = \lambda y$

$^{(I)}$Utiliser $\theta \in \mathbb{R} / e^{i\theta} \langle x \mid y \rangle = |\langle x \mid y \rangle|$ pour les preuves (pb Re/Im...)

Dans le cas réel, CS est vrai même si $\langle \mid \rangle$ n'est pas définie

Minkowski : $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$, avec égalité *ssi* $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y$ $\quad \Rightarrow \| \ \|_2$ est une norme

Egalité de la médiane : $\forall (u,v) \in E^2$, $\|u+v\|_2^2 + \|u-v\|_2^2 = 2(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2)$

Identité de polarisation complexe : $\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2 + i(\|x-iy\|_2^2 - \|x+iy\|_2^2))$

Pythagore : $\forall (u,v) \in E^2$, $\langle u \mid v \rangle = 0 \Rightarrow \|u+v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$ $\quad$ PAS DE RECIPROQUE (on obtient $\operatorname{Re}\langle u \mid v \rangle = 0$)

$\begin{cases} E\times E\to\mathbb{C} \\ (x,y)\mapsto\langle x\mid y\rangle \end{cases}$ est continue si E est muni de $\| \ \|_2$ ($\mathscr{C}°$ bilin : $\exists C / \|\varphi(x,y)\|\le C\|x\|\|y\|$)

$j\begin{cases} E\mapsto E'=\mathscr{L}_C(E,\mathbb{C}) \\ x\mapsto\langle x\mid\bullet\rangle \end{cases}$ est une isométrie semi-linéaire, bij. si E est de dim finie

II. Orthogonalité

$(E,\langle\mid\rangle)$ espace préhilbertien complexe

$x,y\in E$ sont orthogonaux lorsque $\langle x\mid y\rangle=0$, on note $x\perp y$

$A,B\subset E$ $\quad A\perp B\Leftrightarrow\forall(x,y)\in A\times B,\langle x\mid y\rangle=0$ $\quad A^\perp=\{y\in E\mid\forall x\in A,\langle x\mid y\rangle=0\}$

$A^\perp$ est un sev $\quad A\subset B\Rightarrow B^\perp\subset A^\perp$ $\quad A\subset A^{\perp\perp}$ et $A^{\perp\perp\perp}=A^\perp$

$x_1\dots x_n$ 2 à 2 orthogonaux $\Rightarrow\|x_1+\dots+x_n\|_2^2=\sum_{i=1}^n\|x_i\|_2^2$ $\quad (x_i)_{i\in I}\in(E\setminus\{0\})^I$ 2 à 2 $\perp$ $\Rightarrow(x_i)_{i\in I}$ est libre

Un espace préhilbertien complexe de dimension finie est un espace hermitien.

$(x_i)_{i\in I}$ est orthonormée si $\forall i\neq j,\langle x_i\mid x_j\rangle=0$ et $\forall i\in I,\|x_i\|_2^2=1$

Tout espace hermitien complexe E possède une BON, et pour tout *sev* de E, $F\oplus F^\perp=E$

Procédé de Schmidt : $(e)=(e_1,\dots,e_n)$ base de E. On dit que $(\varepsilon)=(\varepsilon_1\dots\varepsilon_n)$ est une base de Schmidt attachée à (e) lorsque (ε) est orthornormée et, $\forall k\in [\![1,n]\!],Vect(e_1\dots e_k)=Vect(\varepsilon_1\dots\varepsilon_k)$

On obtient le même algorithme qu'en ev euclidien

$(E,\langle\mid\rangle)$ ev euclidien, (e) base de E : il existe une base de Schmidt (ε) attachée à (e), et si (ε') est une autre base de Schmidt attachée à (e), $\exists(u_1\dots u_n)\in\{-1,1\}^n$ tel que, $\forall i\in [\![1,n]\!],\varepsilon_i'=u_i\varepsilon_i$

$(F_i)_{i\in I}$ famille de sev de l'espace préhilbertien $(E,\langle\mid\rangle)$. $\sum_{i\in I}F_i$ est orthogonale lorsque : $\forall i\neq j,F_i\perp F_j$

Une somme orthogonale est directe. On note $\overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}}F_i$, et si $\overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}}F_i=E$, les $(F_i)_{i\in I}$ sont suppl. orthogonaux

$^{(I)}$ $p\in\mathscr{L}(E)$ proj ($p\circ p=p$). $\quad\ker p\perp\operatorname{Im}p\Leftrightarrow\forall x\in E,p(x)\perp(x-p(x))$.

Dans ce cas, p est un projecteur orthogonal, et on a $\ker p\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im}p=E$, $(\ker p)^\perp=\operatorname{Im}p$ et $(\operatorname{Im}p)^\perp=\ker p$

F sev de E. On a équiv entre :
- F possède un supplémentaire orthogonal G
- $F\oplus F^\perp=E$
- $^{(I)}\exists p$ projecteur orthogonal d'image F (unique dans ce cas)

Si $F\oplus F^\perp=E$, on a $(F^\perp)^\perp=F$ car $\operatorname{Im}p=(\ker p)^\perp$ FAUX en général

F sev de dim. finie de E, $(e_1\dots e_p)$ BON de F. Il existe un projecteur orthogonal de E sur F : $\pi(x)=\sum_{i=1}^p\langle e_i\mid x\rangle e_i$

$\Rightarrow$ Si F sev de E de dim finie, $F\oplus F^\perp=E$, $F^\perp$ est de codim finie

Rmq gen : Si G sev de E possède deux suppl. G' et G'', (G' de dim finie $\Rightarrow G''$ aussi, de même dim.)

F sev de E tq $\exists p$ proj orth de E sur F : $\forall x \in E, d(x,F) = \|x - p(x)\|_2$ (atteinte en $p(x)$ seulement)

$$f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \Rightarrow d(f, \mathbb{R}[X]) = 0$$

En dim finie, si $(e_1...e_p)$ BON de F, $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{p} |\langle e_i \mid x\rangle|^2$

$^{(I)}(E,\langle\,|\,\rangle)$ préhilbertien réel, $p \in \mathcal{L}(E)$ proj. p est orth $\Leftrightarrow$ p est $\mathcal{C}°$ et $|||p||| \leq 1$

($\Rightarrow$ Dvt, $\Leftarrow$ Méth. variationnelle : $\|p(y+tz)\|^2 \leq \|y+tz\|^2 ... 0 \leq \langle y \mid z\rangle$, idem $-z$, $\langle y \mid z\rangle = 0$)

III. Bessel, Parseval

$(E,\langle\,|\,\rangle)$ espace préhilbertien complexe de dim finie. $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ suite orthonormée de E

Bessel : $\forall x \in E$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle e_k \mid x\rangle|^2$ CV de somme $\leq \|x\|_2^2$

$\forall x \in E$, on a équivalence entre : $-$ $(\pi_p(x))_p$ CV vers x $\quad - x \in \overline{Vect(e_k)_{k\in\mathbb{N}}}$ $\quad - \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x \mid e_k\rangle|^2$ (Parseval)

$iii \Rightarrow i)\ \|x\|^2 = \|x - \pi_p(x)\|^2 + \|\pi_p(x)\|^2$ $\quad ii \Rightarrow i)\ \varepsilon > 0, y \in Vect(e_0...e_N)$ tq $\|x-y\| \leq \varepsilon, \|x-y\| \geq d(x, Vect(e_1...e_p))$ pour $p \geq N$

Avec l'id. de polarisation : $\forall x,y \in \overline{Vect(e_n)_n}$, $\langle x \mid y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\langle e_n \mid x\rangle} \langle e_n \mid y\rangle$ (extension de la dim finie)

Si $\overline{Vect(e_n)_n} = E$, $\forall x \in E, x = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \langle e_k \mid x\rangle e_k$

$(\ell^2(\mathbb{N}), \|\ \|_2)$ est complet $\quad||\quad$ E espace de Hilbert (=préhilbertien complet). Si E est séparable (possède une partie den. dense), E possède $(e_n)_n$ sys ON tq $\overline{Vect(e_n)_n} = E$, et $E \cong \ell^2(\mathbb{N})$

$^{(I)}E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 fg$ $\qquad K \in \mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R})$, on pose $\Phi : f \mapsto (x \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y) dy)$

Pour $\lambda_1...\lambda_n$ vp de Φ attachées à des vect. p. orth, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq \iint_{[0,1]^2} K^2 \Rightarrow (E_\lambda)$ est de dim finie

Si K est symétrique, pour $\lambda \neq \mu, E_\lambda \perp E_\mu$ $\qquad$ ($(\Phi(f))(x) = \langle K(x,\bullet) \mid f\rangle \Rightarrow$ Bessel, Fubini...)

Complément : Théorème de Riesz

$^{//HP//}(E,\langle\,|\,\rangle)$ espace préhilbertien réel. C partie convexe complète non vide de E

$\forall x \in E, \exists! y \in C$, $\|x-y\|_2 = d(x,C)$, et $\forall z \in C$, $\langle x - y \mid z - y\rangle \leq 0$

Notons $y = p(x)$. Alors p est $1-$lipschitzien

1) $(y_n), \|x - y_n\|_2 \to d(x,C)$: médiane $\Rightarrow (y_n)$ de Cauchy $\to y$. $\|x-y\|^2 \leq \|x - (1-t)y + tz\|^2 \Rightarrow ...$

$\Rightarrow 0 \leq 2\langle x - y \mid y - z\rangle + t\|y-z\|^2$ Unicité : médiane encore. $\quad 2) 1 \Rightarrow \langle x - x' \mid p(x) - p(x')\rangle \geq \|p(x) - p(x')\|^2 + CS$

F sev complet de $(E,\langle\,|\,\rangle) \Rightarrow F \oplus F^\perp = E$