Chap 21 : Séries entières

Préliminaires : séries formelles

$\mathbb{K}$ corps commutatif

$\mathbb{K}[[X]]=\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n \mid (a_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right\}$, muni des lois : $\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}b_nX^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)X^n$

et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nX^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nX^n$ où $(c_m)_m=(a_n)_n\star(b_p)_p$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$ est appelée série génératrice de $(a_n)_n$

I. Généralités sur les séries entières, rayon

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On appelle série entière à coeff dans $\mathbb{K}$ toute série de fonctions de la forme $\sum a_nz^n$ où $(a_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

On note $f=\sum a_nz^n$, et $(a_n)_n$ est la suite des coeffs de f

/!\ $f=\sum z^{n^2}\to a_p=0$ si p n'est pas un carré, 1 si p est un carré

Le domaine de convergence de $f=\sum a_nz^n$ est $\{z\in\mathbb{C}/\sum a_nz^n \text{ CV}\}$ Si z est dans le domaine, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$

Lemme d'Abel : $z_0\in\mathbb{C}$ tq $(a_nz_0^n)_n$ est bornée $\Rightarrow\forall z\in\mathbb{C},\ |z|<|z_0|, \sum a_nz^n$ est ACV

Le rayon de convergence de $f=\sum a_nz^n$ est $\rho(f)=\sup\{r\in\mathbb{R}^+/(a_nr^n)_n$ est bornée$\}$.

$\sum a_nz^n$ série entière de rayon de CV R $\quad -R=+\infty\Rightarrow\sum a_nz^n$ CVA sur $\mathbb{C}$

$-R$ fini $\Rightarrow\forall z\in\mathbb{C},\ (|z|<R\Rightarrow\sum a_nz^n$ est ACV$)\ (|z|>R\Rightarrow(a_nz^n)$ est non borné$)$

On ne sait rien pour $|z|=R$: $\sum z^n$ CV *ssi* $|z|<1$ || $\sum_{n\geq1}\frac{z^n}{n}$: $\rho=1$, *CV* sur le cercle sauf en 1 || $\sum nz^n$ *CV ssi* $|z|<1$

II. Détermination du rayon

$(a_n),(b_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ Si $a_n=O(b_n)$, alors $\rho(\sum a_nz^n)\geq\rho(\sum b_nz^n)$ $\quad(\Rightarrow$ si $a_n\geq0$ et $b_n\geq0, a_n\sim_{+\infty}b_n\Rightarrow\rho_a=\rho_b)$

CL $\quad\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2,\rho(\sum(\lambda a_n+\mu b_n)z^n)\geq\min(R_a,R_b)$ $\quad$ (Si $R_a\neq R_b,\ \rho(\sum(a_n+b_n)z^n)=\min(R_a,R_b)$)

Convolution $\quad(c_m)=(a_n)\star(b_n)\quad R_c\geq\min(R_a,R_b)$, de somme $\sum_{m=0}^{+\infty}c_mz^m=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty}c_pz^p\right)$

Règle de d'Alembert : $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},a_n\neq0\\ \exists\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L\in\overline{\mathbb{R}}\end{cases}$ la série entière $\sum a_nz^n$ est de rayon de CV $\frac{1}{L}$

$\sum F(n)z^n$ où $F \in \mathbb{C}(X)\setminus\{0\} \to R=1$ $\quad\quad$ $\sum \frac{z^n}{(n!)^\alpha}$: $\alpha=0: R=1, \quad \alpha>0: R=+\infty, \quad \alpha<0: R=0$

Ne marche pas avec les séries lacunaires : $\sum n! z^{n^2}$ ($R=1$ en écrivant $|z|=e^{-\lambda}$)

$^{//HP//}$Cauchy : $\sum a_n z^n$ série entière. Supposons que $|a_n|^{1/n} \xrightarrow{n\to+\infty} L \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $R=\frac{1}{L}$

$|a_n z^n|^{1/n} \to |z|L$, si $>1, \rho$ tq $|z|L>\rho>1, |a_n z^n| \geq \rho^n$ apcr

La série dérivée de $\sum a_n z^n$ est $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$

Les rayons de convergence $R=\rho(\sum a_n z^n)$ et $R'=\rho(\sum (n+1)a_{n+1}z^n)$ sont égaux. (double inég, $1<\rho<R$)

Par récurence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \rho(\sum (n+p)...(n+1)a_{n+p}z^n)=R$

Utiliser la dérivation pour se ramener à une série dont on peut calculer le rayon

$\rho(\sum a_n z^n)=\min(\sqrt{\rho(\sum a_{2n}z^n)}, \sqrt{\rho(\sum a_{2n+1}z^n)})$ $\quad||\quad$ $\rho(\sum a_n X^n) \geq R \Leftrightarrow \forall r \in]0,R[, a_n = O(r^{-n})$

III. Propriétés de la somme d'une série entière

$\sum a_n z^n$ série entière de somme f sur un domaine de rayon R

$\sum a_n z^n$ CVU sur tout compact de $D(0,R)$ $\quad||\quad$ f est continue sur $D(0,R)$

Sauf si (a_n) est presque nulle, il n'y a pas CVU globale pour $R=+\infty$

En général, il n'y a pas de CVU sur $D(0,R)$ (pour R fini) $\quad$ Si oui, il y a CVU sur $\overline{D}(0,R)$

$\sum |a_n|$ CV $\Rightarrow \sum a_n z^n$ CVN sur $\overline{D}(0,1)$

$^{//HP//}$Supposons : $a_0=0$ et $(a_n)\neq 0$. Alors : $\exists r \in \left]0,R\right[, f$ ne s'annule pas sur $D(0,R)\setminus\{0\}$

$p=\min\{k / a_k \neq 0\}, \quad f(z)=z^p g(z), g(z)\neq 0$ en 0 + continuité

Unicité : $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ séries entières de rayon R_a et $R_b>0$. S'il existe $\min(R_a,R_b)>r>0$ tq :

$\forall z \in \overline{D}(0,r), \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n=b_n$

Rappel : $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), f$ peut être nulle au vois de 0 sans être identiquement nulle

$\forall n \in \mathbb{N}, r \in]0,R[, a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$ $\quad$ (Série de fonctions CVN)

Liouville : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de CV $+\infty$, de somme f bornée $\Rightarrow f$ est constante

Formule de Cauchy : $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})re^{i\theta}}{re^{i\theta}-z}d\theta$ (dvt en série géom...) $\quad||\quad$ $\sup_{|z|\leq r}|f(z)|=\sup_{|z|=r}|f(z)|$

IV. Séries entières d'une variable réelle

$(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\sum a_n x^n$ SE de rayon de CV $R>0$, f sa somme sur $]-R,R[$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, avec : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[, f^{(p)}(x)=\sum_{n\geq 0}(n+p)...(n+1)a_{n+p}x^n$

$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(0)$ || $\forall (\alpha,\beta) \in]-R,R[^2, \int_\alpha^\beta f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1} \right)$

$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ (dvt $e^{x \ln x}$, intégration, relation de récurrence)

V. Développement en série entière

Ω ouvert de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ f est développable en série entière (DSE) au voisinage de a s'il existe $(\alpha_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et $r > 0$ tq : $\forall z \in D(a,r)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n$, CV de somme $f(z)$

La continuité est nécessaire, non suffisante || Si le DSE existe, il est unique

$a \in \mathbb{R}$ Si f est DSE au vois. de a, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un vois. de a et $\sum a_n X^n = \sum \frac{f^{(k)}(a)}{k!} X^k$

Pour que f soit DSE en a, il faut que $\rho\left(\sum \frac{f^{(k)}(a)}{k!} X^k \right) > 0$ et il suffit qu'il existe $r > 0$, tq :

$\forall h \in]-r,r[$, $R_n(f,a,h)$ (reste de Taylor) tend vers 0 pour $n \to +\infty$

$f(x) = e^{-1/x^2}$, si $x \neq 0$, f $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \geq 0$, $f^{(k)}(0) = 0$: $\rho(\text{taylor}) = +\infty$ mais, $\forall x \neq 0$, $f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Série géométrique : $|z| < 1$ $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ $\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$ Sur $\mathbb{R}$: $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Fractions rationnelles : Décomposition en éléments simples : $F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{\alpha_k} \frac{\beta_{k,l}}{(z-a_k)^l} \right)$

$|z| < |a_k| \mapsto \frac{1}{(z-a_k)^l} = \frac{(-1)^l}{a_k{}^l} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+l-1}{l-1} \frac{z^{n+1}}{a_k{}^l}$ $\to F(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, $\rho(\sum a_n X^n) = \min(|a_1| \ldots |a_r|)$

$|a_1| \leq \ldots < |a_s| < r < |a_{s+1}| < \ldots < |a_r|$ $\int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta = 2i\pi \sum_{i=1}^{s} \beta_{i,1}$ (DSE p/r a des pôles simples...)

$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Série du binôme (Abel) : $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ La SE $1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha$ a pour rayon de CV 1

$R \to$ D'Alembert. Equa diff $\to (1+x)y' = \alpha y$ + unicité de la sol de l'ED d'ordre 1 linéaire

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. $R = +\infty$, Cette fonction coïncide avec l'exponentielle réelle usuelle ($\exp' = \exp$)

$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ || $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ || $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ || $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z')$ (Produit de Cauchy, regroupements)

$\cos, \sin, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ vérifient les équations fonctionnelles usuelles || on retrouve $\cos$ par Taylor

On montre que $\exp$ est un $\mathcal{C}^1$ − difféo de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ || $\overline{\exp z} = \exp \bar{z} \underset{\mathcal{C}^\circ}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{R}, \overline{e^{ix}} = e^{-ix} \Rightarrow |e^{ix}| = 1$

On vérifie $\cos' = -\sin, \sin' = \cos$ || $\cos 0 = 1,\ \cos 2 < 0$ (Leibniz) $\Rightarrow$ un plus petit 0 $a = \dfrac{\pi}{2} > 0$

$\varphi : x \mapsto e^{ix}$ morphisme de groupes continue, $\ker \varphi$ ss-groupe fermé non trivial de $\mathbb{R} \Rightarrow \alpha Z \supset 2\pi\mathbb{Z}$

On étudie les variations respectives sur les cadrans, et on trouve $\ker \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$

VI. Méthodes pratiques de DSE

Opérations : combinaisons linéaires, dérivation, intégration, convolution (/!\ ACV)

$^{(I)}$Passage réel-complexe : coïncidence de séries entières sur intervalle non trivial

Pour fonctions trigonométriques : linéariser avec l'exponentielle

Rappel : résidu en un pôle simple de $\dfrac{P}{Q}$: $\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$. Pôle multiple $\to$ DL de $(X-\alpha)^{\alpha_a}\dfrac{P}{Q}$ en α

Si demandé, prendre le temps de décomposer correctement...

On recherche une équa diff à coeffs polynômiaux dont la fonction est solution, puis une SE solution

Recherche de l'ED. Analyse (supp. f DSE, coeffs ?), Synthèse (introd. de la SE, rayon, unicité (Cauchy))

Etude de la sommabilité $\Rightarrow$ VALEURS ABSOLUES

$^{//HP//}$ $g = \sum b_n x^n$, $f = \sum a_n x^n$ FSE de rayons R et $R' > 0$. $|f(0)| < R \Rightarrow g \circ f$ DSE sur un disque de rayon $r > 0$

Passer par la séries avec valeurs absolues, et la convolution des ces séries là $\to$ ACV

f SE de rayon $R > 0, \forall |z_0| < R, \forall |h| < R - |z_0|, f(z_0 + h) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(p)}(z_0)}{p!} h^p$ $\left(\sum\sum \binom{n+p}{p} a_{n+p} z_0^n h^p\right.$ + Fubini)

$f \neq 0 \Rightarrow \forall r \in]0, R[, Z_r = \{z \in \overline{D}(0,r) / f(z) = 0\}$ est fini $((w_n)_n \in Z^{\mathbb{N}}$ inj CV $\to w$, DSE en w : nul ?)

A partir d'une équation fonctionnelle, on construit une SE, on vérifie sa CV (Analyse-synthèse)

I intervalle de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est analytique sur I si elle est DSE au voisinage de tout point de I

$^{//HP//}$ I intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Supp : $\forall [a,b] \subset I,\ \exists C > 0,\ \exists R > 0,\ \forall (x,n) \in [a,b] \times \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \le Cn!$

Alors f est analytique sur I (Egalité Taylor-Lagrange, majoration du reste)

$^{//HP//}$ Fonctions absolument monotones : I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ tq :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \ge 0$ Alors f est analytique sur I

TRI en 0, majoration du reste par $f(r)$, croissance des dérivées : $R_n(x) \le (x/r)^n R_n(r) \le (x/r)^n f(r)$

VII. Etude au bord

Supposons $R = \rho(\sum a_n x^n) \in \mathbb{R}_+^*$

Si $\sum |a_n| R^n$ CV, $\sum a_n z^n$ CVN sur $\overline{D}(0,R)$, et y définit une fonction continue

$^{//HP//}$ Abel : Supp. la série de termes complexes $\sum a_n$ CV. Alors $\rho(\sum a_n x^n) \ge 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Transformation d'Abel avec les restes (pas les sommes partielles) $\to$ CCU sur $[0,1]$

Pas de réciproque : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{1^-} \frac{1}{2}$, mais $\sum(-1)^n$ DV

$\sum a_n, \sum b_n$ séries CV, $(c_n)=(a_n)\star(b_n)$ Si $\sum c_n$ CV, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$ (ici, pas de CVA)

Si $a_n \geq 0$ et $\rho(\sum a_n X^n)=1$ $\sum a_n X^n$ bornée sur $[0,1[\Rightarrow \sum a_n$ CV

$f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ bornée sur $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow \int_0^{+\infty} f$ CV

$(a_n),(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\sum a_n x^n$ de somme f et $\sum b_n x^n$ de somme g, de rayons ≥ 1. $\underline{b_n > 0}$

//HP// $\sum b_n$ DV $\Rightarrow g \xrightarrow{1^-} +\infty$ Si de plus $\begin{cases} a_n = o(b_n), \text{ alors } f = o_{1^-}(g) \\ a_n \sim b_n, \text{ alors } f \sim_{1^-} g \end{cases}$

Inégalités, croissance. Découpage de somme (comme Cesaro), ε

Comparaison série intégrale pour certains équivalents

En 1^-, écrire $x = e^{-\lambda}$, faire tendre λ vers 0^+

VIII. Application des séries entières

Variable complexe $\rightarrow$ Majoration (Liouville, principe du max (atteint sur le bord)). Zéros isolés

Equation différentielles : Traversée des singularités $(x^2 y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0)$

$\rightarrow$ Recherche d'une solution DSE au vois de 0

Séries génératrices $\rightarrow$ Dénombrement

En général, on se retrouve avec des séries de fractions rationnelles.

Pour un équivalent, on se contente du pôle de plus haute multiplicité

Logarithme complexe : pour $|z-1|<1, Log(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$

$u \in \mathcal{C}^1([0,1], D(1,1)) \Rightarrow t \mapsto Log(u(t))$ est $\mathcal{C}^1$ et $(Log \circ u)' = \frac{u'}{u}$ (CVU des dérivées $\Rightarrow$ DTAT)

//HP// $\forall z \in D(1,1),\ \exp(Log(z)) = z$ $(u(t)=(1-t)+tz, [\exp(Log(u(t))/u(t))]'=0...)$

$g \in \mathcal{C}(A, D(1,1)) \Rightarrow \exists h \in \mathcal{C}(A,\mathbb{C})$ tq $g = e^h$ $(h = Log(g))$

$f \in \mathcal{C}(\overline{D}(0,1),\mathbb{C}^*) \Rightarrow \exists \tilde{f} \in \mathcal{C}(\overline{D}(0,1),\mathbb{C})$ tq $f = e^{\tilde{f}}$

$f_{k\,n} : z \mapsto f(kz/n)$. $\exists n$ tq $\forall k, u = (f_{k+1\,n}/f_{k\,n}) \in D(1,1)$ $\left(\text{car, avec } \varepsilon = \frac{1}{2}\min|f(z)|>0;\ \text{UC donne } n \text{ tq } |f_{k+1\,n} - f_{k\,n}| \leq \varepsilon\right)$

On prend g tel que $f_{k+1n} = e^{g_{k+1}}$ $f = f_{mn} = e^{g_0+\ldots+g_n}$

IX. Sommations de séries entières

$S = \sum \frac{P(n)}{n!}x^n$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ de deg. d : $P(x) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X(X-1)\ldots(X-k+1)$: $S = \left(\sum_{k=0}^{d}\alpha_k x^k\right)e^x$

Se ramener si besoin à la série du logarithme. Penser aux valeurs connues de SE

Suites récurrentes : $u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n$ $\Rightarrow (1 - a_{p-1}x + \ldots + a_0 x^p)\sum u_n x^n = P(x)$