Chap 2 : Séries numériques

I. Généralités

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Une série à valeur dans $\mathbb{K}$ est un couple (u_n,U_n) où $(u_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

(u_n) est le terme général de la série, (U_n) la suite des sommes partielles. On note $\sum u_n$ pour (u_n,U_n)

La série décalée à l'ordre p de $\sum u_n$ est $\sum v_n$ où $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_{n+p}$

L'ensemble des séries muni des lois naturelles est un $\mathbb{K}-ev$

$\sum u_n$ série de terme général dans $\mathbb{K}$

$\sum u_n$ converge si la suite $U_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ converge. La limite de U_n est la somme de la série $U=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$

$\sum u_n$ diverge si la suite (U_n) diverge

On dit que Σu_n et Σv_n sont de même nature lorsque (Σu_n converge *ssi* Σv_n converge)

$\sum u_m$ série convergente de somme U. Le reste d'ordre n de $\sum u_m$ est $R_n=\sum_{m=0}^{+\infty}u_m-\sum_{k=0}^{n}u_k=U-U_n=\sum_{m=k+1}^{+\infty}u_m$

$^{(I)}$Equivalence suite-série : $(u_n)_n$ converge $\Leftrightarrow\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge

Divergence grossière : Σu_n converge $\Rightarrow (u_n)_n\to 0$

Une sombinaison linéaire de séries convergentes converge. $CV+DV=DV$ (/!\ $DV+DV=?$)

$^{(I)}\sum q^n$ converge *ssi* $|q|<1$ $\left(\text{somme : }\dfrac{1}{1-q}\right)$ $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}q^n\right)(1-q)=\sum_{n=0}^{+\infty}q^n-\sum_{n=0}^{+\infty}q^{n+1}=1$

II. Séries à termes positifs

$(u_n)_n\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

$\sum u_n$ série à termes positifs :
- U_n croît
- $\sum u_n$ converge *ssi* $(U_n)_n$ est majorée
- $\sum u_n$ diverge *ssi* $(U_n)_n\to+\infty$

$\sum u_n$série à termes positifs
- φ injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et $(v_n)_n=(u_{\varphi(n)})_n$: $\sum u_n$ CV $\Rightarrow\sum v_n$ CV de somme $V\le U$
- σ bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et $(v_n)_n=(u_{\sigma(n)})_n$: $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow\sum v_n$ CV, les sommes sont les mêmes

ψ extraction. $(u_n)_n\in\mathbb{R}_+, U_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ (U_n) CV $\Leftrightarrow(U_{\psi(n)})$ CV

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ séries à termes positifs tels que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\le v_n$: $\sum v_n$ CV $\Rightarrow\sum u_n$ aussi avec $U\le V$

$(u_n)_n,(v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ $\quad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature

Application utile : $\sum u_n$ série à termes positifs. $v_n = \ln(1+u_n)$ $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \sum v_n$ CV $\quad (u_n \to 0:\text{DL})$

Critères multiplicatifs : $(u_n)_n,(v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$.

Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$: $\quad u_n = O(v_n)$ et $\left(\sum v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}\right)$ $\left(pr : \Pi(\leq) : u_{n_0+p} \leq \left(\dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\right) v_{n_0+p} \right)$

Théorème de d'Alembert : $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$ $\quad$ On SUPPOSE qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$

Si $k<1$, $\sum u_n$ converge $\quad$ Si $k>1$, $u_n \to +\infty$ $\quad$ Si $k=1$, on ne peut rien dire

D : q tq $k<q<1$ $\quad \exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < q = \dfrac{q^{n+1}}{q_n}$ + thm $\uparrow$

III. Comparaison série-intégrale

$a \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ $\quad$ On dit que $\int_a^{+\infty} f$ converge lorsque $F : x \mapsto \int_a^x f$ possède une limite en $+\infty$

On dit que $\int_a^{+\infty} f$ diverge sinon

$\int_1^{+\infty} f$ avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ $\quad \alpha = 1 \Rightarrow \int_1^x f = \ln x \to +\infty : DV$ $\quad \alpha \neq 1 : \int_1^x f = \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}$ CV *ssi* $\alpha > 1$ (DV sinon)

$f \in \mathcal{C}_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ avec $\underline{f \geq 0}$. $\quad$ On a équivalence entre :

(i) $\quad \int_a^{+\infty} f$ converge

(ii) $\quad F : x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur $[a,+\infty[$

(iii) $\quad$ La suite $n \mapsto \int_a^n f$ est majorée $\quad$ $(3 \Rightarrow 2 :$ encadrer x avec $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil)$

$f,g \in \mathcal{C}_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{R})$, $f \geq 0$ et $g \geq 0$. $\; f \leq g \Rightarrow$ $\quad \int_a^{+\infty} g$ CV $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ CV $\quad \int_a^{+\infty} f$ DV $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g$ DV

$\int_2^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge *ssi* $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $b > 1$), diverge sinon $\quad$ (multiplier par t^γ avec γ entre α et 1)

//HP// $\quad f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ <u>décroissante positive</u>. La suite $\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f$ converge.

$\Rightarrow$ Si $f \geq 0$ décroissante, la série $\sum f(k)$ et $\int_0^{+\infty} f$ sont de même nature

D : $u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t))dt \leq 0$ $\quad u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f \geq f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f\right) \geq 0 : \searrow$ min

Séries de Riemann : $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ CV si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha \leq 1$

Séries de Bertrand : $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CV si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$), diverge sinon

//HP// Constante d'Euler : $u_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k} - \int_1^n \dfrac{dt}{t}$ converge vers $\gamma > 0 \Rightarrow H_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k} = \gamma + \ln n + o(1)$

IV. Critère de Cauchy

$\sum u_n$ série de nombres complexes : $\sum u_n$ converge *ssi* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m > n \geq n_\varepsilon, \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leq \varepsilon$

Négation : $\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists m > n \geq N$ tq $\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \geq \varepsilon \Leftrightarrow \exists p_n < q_n, p_n \to +\infty$ tq $\sum_{k=p_n}^{q_n} u_k$ ne tend pas vers 0

$(E, \| \ \|)$ evn, $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum \|u_n\|$ converge

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, (U_n) vérifie le critère de Cauchy

Si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'absolue convergence entraîne la convergence

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge

$u_n \geq 0$ $\sum u_n$ DV $\Rightarrow \sum \frac{u_n}{U_n^{\alpha}}$ CV pour $\alpha > 1$, DV pour $\alpha = 1$. $\sum u_n$ CV $\Rightarrow \sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$ DV (Cauchy, croissance)

V. Sommation des relations de comparaison

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ séries réelles avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$ et $\sum v_n$ divergente

$a)$ Si $u_n = o(v_n)$, $U_n = o(V_n)$

$b)$ Si $u_n \sim v_n$, $(u_n \geq 0$ apcr$)$, $U_n \sim V_n$

$u_n = \varepsilon_n v_n \qquad \frac{U_n}{V_n} = \left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k\right) / \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \xrightarrow{n \to +\infty} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_k = 0$ (Cesaro généralisé)

Comparaison des restes : $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec pour tout $n, v_n > 0$. Supposons que $\sum v_n$ converge

$a)$ Si $u_n = O(v_n)$, $\sum u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$

$b)$ Si $u_n = o(v_n)$, $\sum u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$

$c)$ Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

$^{(I)}$Méthode de validation : $a_{n+1} - a_n \sim u_n$ $(>0, \sum u_n$ DV$) \Rightarrow a_{n+1} \sim U_n$

VI. Semi-convergence

$(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $\sum u_n$ est semi-convergente si $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ On note $u_n^+ = \sup((u_n), 0)$, $u_n^- = \sup((-u_n), 0)$ $(u_n = u_n^+ - u_n^-,\ |u_n| = u_n^+ + u_n^-)$

Si $\sum u_n$ est semi convergente, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent.

Critère de Leibniz : $(v_n)_n$ suite réelle DECROISSANTE de limite nulle, et $u_n = (-1)^n v_n$.

La série $\sum u_n$ converge, et $\forall n \in \mathbb{N},\quad U_{2p+1} \leq U \leq U_{2p}$ $\qquad ^{(I)}|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k\right| \leq v_{n+1}$

$\sum |u_n|$ CV : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ CV de somme U

$^{//HP//}$ $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ Supp. $\int_0^{+\infty} |f'|$ CV. Alors la série $\sum f(k)$ et la suite $\int_0^n f$ sont de même nature

IPP $\int_n^{n+1} (f(n) - f(t)dt) = [(f(t) - f(n)(t-(n+1))]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f'(t)(t-(n+1))dt \Rightarrow |u_n - \int_n^{n+1} f| \leq \int_n^{n+1} |f'| \Rightarrow$ comp°

$^{//HP//}$ Transformation d'Abel : $(v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Supp $\begin{cases} \text{Les sommes partielles de } \sum v_n \text{ sont bornées} \\ \varepsilon_n \text{ décroît vers } 0 \end{cases}$

Alors la série $\sum \varepsilon_n v_n$ converge

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k v_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1})\right| = \left|\varepsilon_n V_n - \varepsilon_m V_{m-1} + \sum_{k=m}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} V_k)\right| \leq \varepsilon_n M + \varepsilon_m M + \sum_{k=m}^{n-1} \underbrace{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})}_{\geq 0 \text{ car décroît}} M \leq 2\varepsilon_m M + \text{Cauchy}$$

VII. Compléments

Amélioration de d'Alembert : faire un DA quand $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$

Formule de Stirling : $n! \sim_{+\infty} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$x_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.\ DL \Rightarrow \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) : CV \to C > 0. I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \frac{n+1}{n} I_{n-2} \text{ (IPP)}. n I_n I_{n-2} = \frac{\pi}{2} (rec) I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Croupement de termes : $u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \varphi$ extraction avec $\varphi(0) = 0$, $v_n = u_{\varphi(n)} + ... + u_{\varphi(n+1)-1}$

Si $(u_n)_n \geq 0$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Sinon, si $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\delta_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} |u_k| \to 0$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Techniques utiles :

"Limite monotone" (ici, $(u_n)_n$ décroissante) : $\forall n \geq p$, $\sum_{k=0}^{p} (u_k - u_n) \leq \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_n)$ puis fix. p

"Règle du $n^\alpha u_n$" ($u_n \geq 0$) : Si $n^\alpha u_n \to L \in \mathbb{R}_+$:

La série CV si $\alpha > 1$, DV si $\alpha \leq 1$ $\left(\dfrac{L}{2n^\alpha} \leq u_n \leq \dfrac{(L+1)}{2n^\alpha} \text{ apcr}\right)$

Contre-exemples $\to$ suites "lacunaires", avec pleins de 0

Trouver des équivalents de suites récurrentes : chercher f tq $f(x_{n+1}) - f(x_n) \to l$ finie

"DL généralisé" : développer avec développement limités pour avoir des termes CV (et 1 DV)

$$\sum_{k=n}^{m} \varepsilon_k v_k = \varepsilon_m V_m - \varepsilon_n V_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} V_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$$

Etudier $\sum \ln \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ pour avoir par exemple la convergence de x_n

Intégrales : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 (-1)^n t^{4n} dt$

$$\int_n^{n+1} \underbrace{(f(t) - f(k))}_{u} \underbrace{dt}_{v'} = [(t-(k+1))(f(t) - f(k)]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} (k+1-t) f'(t) dt$$