

Chap 2 : Séries numériques

I. Généralités

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Une série à valeur dans \mathbb{K} est un couple (u_n, U_n) où $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^n u_k$

(u_n) est le terme général de la série, (U_n) la suite des sommes partielles.

On note $\sum u_n$ pour (u_n, U_n)

La série décalée à l'ordre p de $\sum u_n$ est $\sum v_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+p}$

L'ensemble des séries muni des lois naturelles est un \mathbb{K} -ev

$\sum u_n$ série de terme général dans \mathbb{K}

$\sum u_n$ converge si la suite $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ converge. La limite de U_n est la somme de la série $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

$\sum u_n$ diverge si la suite (U_n) diverge

On dit que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature lorsque $(\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge)

$\sum u_m$ série convergente de somme U . Le reste d'ordre n de $\sum u_m$ est $R_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m - \sum_{k=0}^n u_k = U - U_n = \sum_{m=k+1}^{+\infty} u_m$

Equivalence suite-série : $(u_n)_n$ converge $\Leftrightarrow \sum (u_{n+1} - u_n)$ converge

Divergence grossière : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow (u_n)_n \rightarrow 0$

Une combinaison linéaire de séries convergentes converge. $CV + DV = DV$ (!/ $DV + DV = ?$)

$$\sum q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \left(\text{somme : } \frac{1}{1-q} \right) \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \right) (1-q) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n - \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n+1} = 1$$

II. Séries à termes positifs

$(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

$\sum u_n$ série à termes positifs : – U_n croît

– $\sum u_n$ converge ssi $(U_n)_n$ est majorée

– $\sum u_n$ diverge ssi $(U_n)_n \rightarrow +\infty$

$\sum u_n$ série à termes positifs

– φ injection de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et $(v_n)_n = (u_{\varphi(n)})_n$: $\sum u_n$ CV $\Rightarrow \sum v_n$ CV de somme $V \leq U$

– σ bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et $(v_n)_n = (u_{\sigma(n)})_n$: $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \sum v_n$ CV, les sommes sont les mêmes

ψ extraction. $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+, U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ (U_n) CV $\Leftrightarrow (U_{\psi(n)})$ CV

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ séries à termes positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$: $\sum v_n$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ aussi avec $U \leq V$

$$(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \quad u_n \sim v_n \Rightarrow \sum v_n \text{ et } \sum u_n \text{ sont de même nature}$$

Application utile : $\sum u_n$ série à termes positifs. $v_n = \ln(1+u_n)$ $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \sum v_n$ CV ($u_n \rightarrow 0$:DL)

Critères multiplicatifs : $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$.

$$\text{Si } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} : \quad u_n = O(v_n) \text{ et } \left(\sum v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV} \right) \left(\text{pr} : \Pi(\leq) : u_{n_0+p} \leq \left(\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \right) v_{n_0+p} \right)$$

Théorème de d'Alembert : $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$ On SUPPOSE qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k$

Si $k < 1$, $\sum u_n$ converge Si $k > 1$, $\sum u_n$ diverge Si $k = 1$, on ne peut rien dire

$$\mathbf{D} : q \text{ tq } k < q < 1 \quad \exists n_0 / \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} < q = \frac{q^{n+1}}{q_n} + \text{thm } \uparrow$$

III. Comparaison série-intégrale

$a \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ On dit que $\int_a^{+\infty} f$ converge lorsque $F : x \mapsto \int_a^x f$ possède une limite en $+\infty$

On dit que $\int_a^{+\infty} f$ diverge sinon

$$\int_1^{+\infty} f \text{ avec } f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \quad \alpha = 1 \Rightarrow \int_1^x f = \ln x \rightarrow +\infty : DV \quad \alpha \neq 1 : \int_1^x f = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \text{ CV ssi } \alpha > 1 \text{ (DV sinon)}$$

$f \in \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ avec $f \geq 0$. On a équivalence entre :

(i) $\int_a^{+\infty} f$ converge

(ii) $F : x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur $[a, +\infty[$

(iii) La suite $n \mapsto \int_a^n f$ est majorée (3 \Rightarrow 2 : encadrer x avec $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$)

$$f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R}), f \geq 0 \text{ et } g \geq 0. \quad f \leq g \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ CV} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ CV} \quad \int_a^{+\infty} f \text{ DV} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ DV}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1), \text{ diverge sinon (multiplier par } t^\gamma \text{ avec } \gamma \text{ entre } \alpha \text{ et } 1)$$

//HP// $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante positive. La suite $\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f$ converge.

\Rightarrow Si $f \geq 0$ décroissante, la série $\sum f(k)$ et $\int_0^{+\infty} f$ sont de même nature

$$\mathbf{D} : u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t)) dt \leq 0 \quad u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f \geq f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} (f(k) - \int_k^{k+1} f) \geq 0 : \searrow \min$$

Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha \leq 1$

Séries de Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CV si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$, diverge sinon

$$//HP// \text{ Constante d'Euler : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dt}{t} \text{ converge vers } \gamma > 0 \Rightarrow H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \gamma + \ln n + o(1)$$

IV. Critère de Cauchy

$\sum u_n$ série de nombres complexes : $\sum u_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_\varepsilon, \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \leq \varepsilon$

Négation : $\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists m > n \geq N$ tq $\left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \geq \varepsilon \Leftrightarrow \exists p_n < q_n, p_n \rightarrow +\infty$ tq $\sum_{k=p_n}^{q_n} u_k$ ne tend pas vers 0

$(E, \| \cdot \|)$ evn, $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum \|u_n\|$ converge

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, (U_n) vérifie le critère de Cauchy

Si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'absolue convergence entraîne la convergence

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge

$$u_n \geq 0 \quad \sum u_n \text{ DV} \Rightarrow \sum \frac{u_n}{U_n^\alpha} \text{ CV pour } \alpha > 1, \text{ DV pour } \alpha = 1. \quad \sum u_n \text{ CV} \Rightarrow \sum \frac{u_n}{R_{n-1}} \text{ DV} \quad (\text{Cauchy, croissance})$$

V. Sommation des relations de comparaison

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ séries réelles avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$ et $\sum v_n$ divergente

a) Si $u_n = o(v_n), U_n = o(V_n)$

b) Si $u_n \sim v_n, (u_n \geq 0 \text{ apcr}), U_n \sim V_n$

Dem : $u_n = \varepsilon_n v_n \quad \frac{U_n}{V_n} = \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon_k v_k \right) / \left(\sum_{k=0}^n v_k \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{n \rightarrow +\infty} \lim \varepsilon_k = 0$ (Cesaro généralisé)

$(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec pour tout $n, v_n > 0$. Supposons que $\sum v_n$ converge

a) Si $u_n = O(v_n), \sum u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$

b) Si $u_n = o(v_n), \sum u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$

c) Si $u_n \sim v_n, \sum u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

(IMPORTANT) Méthode de validation : $a_{n+1} - a_n \sim u_n (> 0, \sum u_n \text{ DV}) \Rightarrow a_{n+1} \sim U_n$

VI. Semi-convergence

$(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $\sum u_n$ est semi-convergente si $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ On note $u_n^+ = \sup((u_n), 0), u_n^- = \sup((-u_n), 0) \quad (u_n = u_n^+ - u_n^-, |u_n| = u_n^+ + u_n^-)$

Si $\sum u_n$ est semi convergente, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent.

Critère de Leibniz : $(v_n)_n$ suite réelle DECROISSANTE de limite nulle, et $u_n = (-1)^n v_n$.

La série $\sum u_n$ converge, et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{2p+1} \leq U \leq U_{2p}$

$$\sum |u_n| \text{ CV : } \forall \sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N}), \sum u_{\sigma(n)} \text{ CV de somme } U$$

// HP // $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ Supp. $\int_0^{+\infty} |f'|$ CV. Alors la série $\sum f(k)$ et la suite $\int_0^n f$ sont de même nature

$$\text{IPP } \int_n^{n+1} (f(n) - f(t)) dt = [(f(t) - f(n)(t - (n+1)))_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f'(t)(t - (n+1)) dt] \Rightarrow |u_n - \int_n^{n+1} f| \leq \int_n^{n+1} |f'| \Rightarrow \text{comp}^\circ$$

// HP // Transformation d'Abel : $(v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Supp $\left\{ \begin{array}{l} \text{Les sommes partielles de } \sum v_n \text{ sont bornées} \\ \varepsilon_n \text{ décroît vers } 0 \end{array} \right.$

Alors la série $\sum \varepsilon_n v_n$ converge

$$\left| \sum_{k=m}^n \varepsilon_k v_k \right| = \left| \sum_{k=m}^n \varepsilon_k (V_k - V_{k-1}) \right| = \left| \varepsilon_n V_n - \varepsilon_m V_{m-1} + \sum_{k=m}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k \right| \leq \varepsilon_n M + \varepsilon_m M + \sum_{k=m}^{n-1} \underbrace{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})}_{\geq 0 \text{ car décroît}} M \leq 2\varepsilon_m M + \text{Cauchy}$$

VII. Compléments

Amélioration de d'Alembert : faire un DA quand $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$

Formule de Stirling : $n! \sim_{+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$x_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}. DL \Rightarrow \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) : CV \rightarrow C > 0. I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \frac{n+1}{n} I_{n-2} \text{ (IPP)}. n I_n I_{n-2} = \frac{\pi}{2} (\text{rec}) I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Croupement de termes : $u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, φ extraction avec $\varphi(0) = 0$, $v_n = u_{\varphi(n)} + \dots + u_{\varphi(n+1)-1}$

Si $(u_n)_n \geq 0$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Sinon, si $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\delta_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} |u_k| \rightarrow 0$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Techniques utiles :

"Limite monotone" (ici, $(u_n)_n$ décroissante) : $\forall n \geq p, \sum_{k=0}^p (u_k - u_n) \leq \sum_{k=0}^n (u_k - u_n)$ puis fix. p

"Règle du $n^\alpha u_n$ " ($u_n \geq 0$) : Si $n^\alpha u_n \rightarrow L \in \mathbb{R}_+$:

La série CV si $\alpha > 1$, DV si $\alpha \leq 1$ $\left(\frac{L}{2n^\alpha} \leq u_n \leq \frac{(L+1)}{2n^\alpha} \text{ apcr} \right)$

Contre-exemples \rightarrow suites "lacunaires", avec pleins de 0

Trouver des équivalents de suites récurrentes : chercher f tq $f(x_{n+1}) - f(x_n) \rightarrow l$ finie

"DL généralisé" : développer avec développement limités pour avoir des termes CV (et 1 DV)

$$\sum_{k=n}^m \varepsilon_k v_k = \varepsilon_m V_m - \varepsilon_n V_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} V_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$$

Etudier $\sum \ln \frac{x_{n+1}}{x_n}$ pour avoir par exemple la convergence de x_n

Intégrales : $u_n = \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 (-1)^n t^{4n} dt$

$$\int_n^{n+1} \underbrace{(f(t) - f(k))}_{v'} dt = [(t - (k+1))(f(t) - f(k))]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} (k+1-t) f'(t) dt$$