Chap 19 : Réduction des endomorphismes

Position du problème : E $\mathbb{K}-ev$ de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.
Trouver les bases de E dans lesquelles la matrice de u prend une forme simple (diagonale, triangulaire...)

I. Stabilité, éléments propres

E $\mathbb{K}-ev$, $u \in \mathcal{L}(E)$

Un sev F de E est dit stable lorsque $u(F) \subset F$, invariant lorsque $u(F)=F$, fixe lorsque $(\forall x \in F, u(x)=x)$

$v \in \mathcal{L}(E)$ $\quad u \circ v = v \circ u$ (càd $[u,v]=0$) $\quad \Rightarrow \ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u

Supp F de dim finie stable par u. Si $\ker u \cap F = \{0\}, u(F)=F$ et $u|_F^F \in GL(F)$

$(e_i)_{i\in [\![1,n]\!]}$ base de E tq $(e_1 ... e_p)$ base de F, $\left(\forall u \in \mathcal{L}(E), F \text{ stable par } u \Leftrightarrow \mathcal{M}at_{(e)}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right), A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \right)$

Calculs : $[u^k]_{(e)} = \left(\begin{array}{c|c} A^k & * \\ \hline 0 & C^k \end{array}\right)$ $\quad \| \quad$ Si $[u]_{(e)} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I & B \\ \hline 0 & \lambda I \end{array}\right)$, $\quad [u^k]_{(e)} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^k I & k\lambda^{k-1} B \\ \hline 0 & \lambda^k I \end{array}\right)$

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, $(e)_i$ base de F_i et $(e) = \bigcup_{i\in [\![1,p]\!]} (e)_i$, $\left(\text{chaque } F_i \text{ est stable par } u \Leftrightarrow [u]_{(e)} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & & 0 \\ \hline & \ddots & \\ \hline 0 & & A_p \end{array}\right) \text{ où } A_i \in \mathcal{M}_{\dim F_i}(\mathbb{K}) \right)$

Si F et G sont stables par u, $F \cap G$ et $F+G$ sont stables par u
$u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie *ssi* tous les sev de E sont stables par u ($\leftarrow$ Schur)

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre (vp) de u lorsque : $\exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$, $\quad ie\ \ker(u - \lambda Id) \neq \{0\}$
On dit alors que x est un vecteur propre attaché à λ. $\qquad$ (λ unique si $x \neq 0$)
Si λ est valeur propre, $E_{\lambda,u} = \ker(y - \lambda Id_E)$ est l'espace propre attaché à λ

x vecteur propre de $u \Leftrightarrow x \neq 0$ et $\mathbb{K}x$ stable par u
λ vp de $u \Rightarrow u|_{E_{\lambda,u}}^{E_{\lambda,u}} = \lambda Id_{E_{\lambda,u}}$ commute avec tous les endomorphismes de $E_{\lambda,u}$
Si E est un $\mathbb{C}-ev$ de dim finie, u possède au moins una valeur propre $\qquad$ (det $\rightarrow$ polynôme)

$\lambda_1 ... \lambda_p$ valeurs propres (2 à 2 distinctes) de $u \in \mathcal{L}(E)$, $x_1 ... x_p$ vecteurs propres associés $\Rightarrow (x_1 ... x_p)$ est libre

Rec + composition par u : $\sum \alpha_i x_i = 0, \sum \alpha_i \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i \neq p} \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_p)}_{\neq 0} x_i = 0$

Les $(E_{\lambda_i,u})_{i\in [\![1,p]\!]}$ sont alors en somme directe

$u \in \mathcal{L}(E), a \in GL(E), \lambda$ vp de $u \Rightarrow \lambda$ vp de $a \circ u \circ a^{-1}$ et $\ker(a \circ u \circ a^{-1} - \lambda Id) = a(\ker(u - \lambda Id))$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(E, \| \ \|)$ $\mathbb{K}-evn$, $u \in L(E)$ $\qquad \lambda$ vp de $u \Rightarrow |\lambda| \leq \|u\|$

II. //HP// Complément : spectre en dimension infinie

$(E, \| \ \|)$ $\mathbb{K}-evn$, $u \in \mathcal{L}_C(E)$ de norme $\|u\|$ $\quad Spec(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} / u - \lambda Id_E$ ne possède pas d'inverse <u>continu</u>$\}$

λ vp de $u \Rightarrow \lambda \in Spec(u)$, RECIPROQUE FAUSSE : $u-\lambda Id$ peut être inj. non surj., ou bij d'inverse non $\mathcal{C}^\circ$

III. Endomorphismes et matrices diagonalisables

E est de dimension finie

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable lorsque E est somme directe des espaces propres de u
$Spec(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u

$\operatorname{card}(Spec(u)) \le \dim E$

$u \in \mathcal{L}(E)$ On a équivalence entre : – u est diagonalisable – $\sum_{\lambda \in Spec(u)} \dim E_{\lambda,u} = \dim E$

– Il existe une base (e) de E formée de vect. propres de u ($\Leftrightarrow [u]_{(e)}$ est diagonale)

$[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ λ vp $\Rightarrow E_{\lambda,u} = Vect(e_i / \lambda_i = \lambda)$ $\ker u = Vect(e_i / u(e_i) = 0)$ $\operatorname{Im} u = Vect(e_i / \lambda_i \ne 0)$

Si u possède $n = \dim E$ vp distinctes $(\lambda_1 ... \lambda_n)$, u est diagonalisable

$u \in \mathcal{L}(E)$ diag. $\operatorname{com}(u) = \{x \in \mathcal{L}(E) / v \circ u = u \circ v\}$ $\dim(\operatorname{com} u) = \sum_{i=1}^{p} (\dim E_{\lambda_i,u})^2$ n vp $\not\Leftarrow\Rightarrow \operatorname{com} u = \mathbb{K}[u]$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ A est diagonalisable s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et Δ diagonale tq $P^{-1}AP = \Delta$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ On a équivalence entre : – A est diagonalisable – $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$ est diagonalisable

– $(\exists \Leftrightarrow \forall)$ E $\mathbb{K}-ev$ de dim finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et (e) base de E tq $[u]_{(e)} = A$ et u est diagonalisable

La propriété est invariante par similitude

IV. Polynômes d'endomorphismes

E $\mathbb{K}-ev$, $u \in \mathcal{L}(E)$

$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ On pose $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$ $(u^0 = Id_E, u^k = \underbrace{u \circ ... \circ u}_{k \text{ fois}})$

$P(0) = a_0 Id$ $P(u)(0) = 0$ $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$

$\varphi_u \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto P(u) \end{cases}$ est un morphisme de $\mathbb{K}-$algèbres unitaire.

$I_u = \ker \varphi_u = \{p \in \mathbb{K}[X] / P(u) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$
Lorsque E est de dimension finie, $I_u \ne \{0\}$.

La fin : $n = \dim E$ $n^2 = \dim \mathcal{L}(E) \to (Id_E ... u^{n^2})$ est liée $\Rightarrow P$ tq $P(u) = 0$

I_u est l'idéal annulateur de u. Si $I_u \ne \{0\}$, son générateur normalisé est le polynôme minimal de u, noté μ_u

$P \in I_u$ $\forall \lambda$ vp de u, $P(\lambda) = 0$ RECIPROQUE FAUSSE
$P \in \mathbb{K}[X]$, $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $[u,v] = 0 \Rightarrow v$ laisse stables $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$

Décomposition des noyaux (DDN) $P_1 \dots P_r \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux.

$$\forall u \in \mathscr{L}(E),\ \ker((P_1 \dots P_r)(u)) = \bigoplus_{i \in [\![1,r]\!]} \ker(P_i(u))$$

Rec +...

(VI) $u \in \mathscr{L}(E)$ u diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, scindé à racines simples, tq $P(u) = 0$

$\Leftarrow P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ avec λ_i 2 à 2 $\neq$ + DDN ($X - \lambda_i \wedge X - \lambda_j = 1$ Bezout) $\Rightarrow DDN$

Si u est diagonalisable et F est stable par u, alors $u\big|_F^F$ est diagonalisable

$u \in \mathscr{L}(E)$ u diag $\Leftrightarrow \exists (F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sev suppl. de E et $\mu_1 \dots \mu_p \in \mathbb{K}$ tq $u = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \pi_i$, avec π_i proj. sur $F_i \,//\, \bigoplus_{j \neq i} F_j$

Calcul des π_i : u diag, annulée par $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \mu_i)$, ($\mu_i \neq \mu_j$)

L_j est $j-$ème interpolateur de Lagrange attaché à $\mu_1 \dots \mu_r$

$\Rightarrow \pi_j = L_j(u)$ est le proj de E sur $F_j = \ker(u - \mu_j Id) \,//\, \bigoplus_{i \neq j} F_i$ et $u = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \pi_j$

Application : suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

$a_0 \dots a_p \in \mathbb{C}^n$ $\mathcal{E} = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,/\, \forall n \geq 0, u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}\}$

$R(X) = X^p - a_{p-1} X^{p-1} - \dots - a_0$ est son équation caractéristique, $\lambda_i \dots \lambda_r$ ses racines et $\alpha_1 \dots \alpha_r$ leur multiplicité

Une base de $\mathcal{E}$ est $(n^k \lambda_i^n)_{i \in [\![1,r]\!], k \in [\![0, \alpha_i - 1]\!]}$

V. Polynôme caractéristique

$\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$ et E $\mathbb{K}-ev$ de dim n

$u \in \mathscr{L}(E)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda$ vp $\Leftrightarrow \det(u - \lambda Id_E) = 0$

$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$

Si A et B sont semblables, $\chi_A = \chi_B$ $\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (A_{\sigma(i)i} - \sigma_{\sigma(i)i} X)$

$u \in \mathscr{L}(E), (e)$ base de E. Le polynôme caractéristique χ_u de u est celui de $[u]_{(e)}$: il ne dépend pas de (e)

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda$ vp de $u \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$

Ses coefficients sont : $X^n \to (-1)^n$ $X^{n-1} \to (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$ $X^0 \to \det(A)$

$^{(I)} n = 2$ $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A) X + \det A$ $n = 3$ $-X^3 + \operatorname{tr}(A) X^2 - (\operatorname{tr}(\operatorname{com} A)) X + \det A$

$^{(I)}$Les coefficients de χ_A sont des invariants de similitude

Spectre dans $\mathbb{K}$: c'est la liste des racines de χ_A dans $\mathbb{K}$ <u>avec multiplicité</u> $(Spec_{\mathbb{R}} A \neq Spec_{\mathbb{C}} A)$

$u \in \mathcal{L}(E), \lambda$ vp de u Multiplicité géométrique de λ : $\dim(\ker(u-\lambda Id_E))$
Multiplicité algébrique de λ : sa multiplicité en tant que racine de χ_A

Si χ_A est scindé $\chi_A = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\lambda_i = \operatorname{tr} A$ $\prod_{i=1}^{p}\lambda_i^{\alpha_i} = \det A$

$u \in \mathcal{L}(E)$ F sev de E stable par u, $v = u|_F^F$ $\Rightarrow \chi_v \mid \chi_u$

λ vp de u, α_λ sa multiplicité algébrique, β_λ sa multiplicité géométrique : $\alpha_\lambda \geq \beta_\lambda$

$u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$ u diagonalisable $\Leftrightarrow \forall\lambda$ vp de $u, \alpha_\lambda = \beta_\lambda$

En pratique : On étudie $AX = \lambda X$ Si χ_A est scindé, A diag $\Leftrightarrow \forall\lambda \in Spec(A), re(A-\lambda I_n) \leq n-\alpha$

Caycley-Hamilton : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$

écriture $(A-XI_n) = \sum X^k B_k, \chi_A(X) = \sum a_k X^k, (A-XI_n)(A-XI_n) = X_A(X)I_n$ + identification des X^k

μ_A polynôme minimal annulateur de A. $\mu_A \mid \chi_A \Rightarrow \deg \mu_A \leq n$

Si $\chi_A = (-1)^n\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, comme $(X-\lambda_i)^{\alpha_i} \wedge (X-\lambda_j)^{\alpha_j} = 1, \chi_A(A) = 0, \mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{p}\ker((A-\lambda_i I)^{\alpha_i})$

χ_A scindé $\Rightarrow$ $(A$ diag $\Leftrightarrow \forall\lambda \in Spec(A), \ker(A-\lambda I) = \ker(A-\lambda I)^2)$

$\Leftarrow \bigoplus_{i=1}^{p}\ker((A-\lambda_i I)^{\alpha_i}) = \bigoplus_{i=1}^{p}\ker(A-\lambda_i I) = \mathbb{K}^n$

VI. Trigonalisation

$u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base $(e_1 \ldots e_n)$ de E tq $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} a_{11} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable lorsque $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), P^{-1}AP = T$ triangulaire supérieure

u trig. $\Leftrightarrow$ $u(Vect(e_1 \ldots e_k)) \subset Vect(e_1 \ldots e_k)$

$u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre : $-\, u$ est trigonalisable
$-\, \chi_u$ est scindé $-\, \exists P \in \mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ scindé tel que $P(u) = 0$

$3 \Rightarrow 1)$ Rec $P(u) = 0 \Rightarrow u$ possède une vp, H hyppl/ $\operatorname{Im}(u-\lambda I) \subset H \Rightarrow$ stable par $u, v = u|_H^H$ trigon., e_n tq $H \oplus \mathbb{K}e_n = E$

u nilpotent $\Rightarrow u$ trigonalisable

u annulé par P scindé $\Rightarrow spec(u) = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, et si $Q \in \mathbb{K}[X], spec(Q(u)) = (Q(\lambda_1) \ldots Q(\lambda_n))$

Compléments

C-I. Méthodes usuelles en théorie de la réduction

Calcul de valeurs propres :

- Trouver $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ attaché à A à l'aide de $P \mapsto P' +$ Equa diff
- Relation de récurrence entre les coeff du système linéaire (si besoin, $x_0 = 0, x_{n+1} = 0 \ldots$)

Si $P^{-1}AP = \Delta$ diagonale, les colonnes de P sont les vecteurs propres de A

Matrices cycliques : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C^n = I_n \Rightarrow Spec(C) \subset \mathbb{U}_n$

$\dim E = n \geq 1, u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 : u diag $\Leftrightarrow \operatorname{tr} u \neq 0$ $\quad (A = CL \Rightarrow LC = \operatorname{tr} A, X^2 - X \operatorname{tr} A$ annule $A)$

E $\mathbb{C}-ev$, u diag $\Leftrightarrow$ Tout sev stable par u possède un suppl. stable par u

$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), A^2$ diag. $\quad A$ diag $\Leftrightarrow \ker A = \ker A^2$ $\qquad A$ diag nilpotente $\Leftrightarrow A = 0$

$A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ $\ \chi_{AB} = \chi_{BA}$ $\qquad$ (B inv ok, $B + I_n / p \to B$, continuité des coefs)

$^{(I)}A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ $\ A$ nilpotent $\Leftrightarrow \operatorname{tr} A = ... = \operatorname{tr} A^n = 0$ $\qquad$ (vp avec rep, trig, abs avec $P = X\prod_{i=2}^{p}(X - \lambda_i)$)

Utile : $\ - P(A) = 0$, mq $\det A > 0 \to$ Calcul des racines de P, vérifier l'absence de 0

$\qquad - M$ tq $M^2 = A? \to$ Soit on diagonalise, soit on utilise des polynômes interpolateurs

C-II. Commutation et réduction simultanée

$u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont codiagonalisables s'ils sont diag. dans une même base $\qquad$ (cotrigonalisables $\to$ analogue)

E $\mathbb{K}-ev$, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables u et v codiag $\Leftrightarrow u \circ v = v \circ u$

$(u_i)_{i \in I}$ famille commutative (qcq) d'endomorphismes diag $\Rightarrow (u_i)_{i \in I}$ est codiag

$(u_i)_{i \in I}$ fam d'involutions de $\mathbb{C}^m$ commutant 2 à 2 $\Rightarrow |I| \leq 2^m$ (atteint)

$\varphi : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_m(\mathbb{C})$ isomorphisme de groupes $\Rightarrow m = n$ $\quad$ (respecte les involutions $\to$ card*inal*)

$(u_1 ... u_p)$ fam commutative d'el^t trig. de $\mathcal{L}$(E) $\Rightarrow$ cotrigonalisables

C-III. Espaces cycliques

E $\mathbb{K}-ev$ de dim finie $n \geq 1, u \in \mathcal{L}(E)$

$x \in E$ $\quad$ L'espace cyclique attaché à x pour u est $F_x = Vect(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$

F_x est le plus petit *sev* de E contenant x stable par u $\qquad F_x = \{P(u) \cdot x \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

$x \neq 0, p = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid (x, ..., u^m(x))$ est liée$\} \Rightarrow (x, ..., u^{p-1}(x))$ est une base de F_x $\quad$ (DE poly)

$P(u) \cdot x = 0 \Leftrightarrow \mu_{u,x} \mid P$

E est dit cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $F_x = E$

Ex: $^{(I)}$nilpotents d'ordre n

$^{(I)}u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique $\Rightarrow Com(u) = \mathbb{K}[u]$ $\qquad$ (on écrit $v(a)$ sur la base $(a ... u^{n-1}(a))$...)

$P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - ... - a_1 X - a_0$ $\ $ (/!\ signes), la matrice compagnon de P est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

$^{(I)}x \in E, F_x = Vect(\beta)$ où $\beta = (x_1 ... u^{d-1}(x))$ libre, $\mu_{u,x} = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - ... - a_0$ $\qquad v = u\big|_{F_x}^{F_x} \Rightarrow [v]_{(\beta)} = C_{\mu_{u,x}}$

Le polynôme caractéristique de C_P est $(-1)^n P$, et minimal est C_P

C_P diagonalisable $\Leftrightarrow P$ scindé à racines simples

$P\in\mathbb{Z}[X]$ normalisé de racines complexes (λ_i) $\forall k\in\mathbb{N}^*, \exists Q\in\mathbb{Z}[X]$ normalisé tq ses racines sont (λ_i^k)

C-IV. Polynôme minimal

$\lambda\in\mathbb{K}$ $\lambda\in Spec(u)\Leftrightarrow \mu_u(\lambda)=0$ (passer par polynômes)

u diagonalisable $\Leftrightarrow \mu_u$ scindé à racines simples

C-V. Décomposition de Jordan-Dunford, espaces caractéristiques

Supposons $(-1)^n\chi_u(X)=\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. $F_{\lambda,u}=\ker(u-\lambda_i Id)^{\alpha_i}$ est l'espace caractéristique attaché à la vp λ

Si $(-1)^n\chi_u(X)=\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, $E=\bigoplus_{i=1}^{p}\ker(u-\lambda_i Id)^{\alpha_i}=\bigoplus_{i=1}^{p}F_{\lambda,u}$

Jordan-Dunford : $u\in\mathcal{L}(E)$, avec χ_u scindé. $\Rightarrow u=D+N$, avec D diag, N nilpotente, et $[D,N]=0$

Une telle décomposition est unique

$\exists$: $\uparrow$ +trig. $\Rightarrow N+D$. $\exists!$: $D+N=\delta+\nu$ δ,ν,N,D laissent stable F_{λ_i}, comm. avec D sur F_{λ_i} $\Rightarrow N'-\nu'=\delta'-D'$

C-VI. Réduction et topologie

Disque de Gershgorin : $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $r_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\Rightarrow Spec(A)\subset\bigcup_{i=1}^{n}D(a_i,r_i)$

N norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda\in Spec(A)\Rightarrow|\lambda|\leq N(A)$

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), SpecA=(\lambda_1...\lambda_n), \varepsilon>0\Rightarrow\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (a_{i,j})\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ avec; $\forall i<j, |a_{ij}|\leq\varepsilon$

L'ensemble Ω des matrices de $\mathcal{M}_n(\underline{\underline{\mathbb{C}}})$ ayant n vp distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(\lambda_k\leftarrow\lambda_k+2^{-k})$

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\Rightarrow\dim Com(A)\geq n$ || $\nexists N$ norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) inv par similitude (densité de $GL_n(\mathbb{K})$)

F fermé de $\mathbb{C}$, $X=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})/Spec(A)\subset F\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (suite A_p, $|\chi_{A_p}(z)|>d(z,F)^n$)

Utile : – $^{(I)}$mettre en évidence un sev stable où faire des calculs simples (dim 2...) (pour l'absurde)

– $^{(I)}A_p\to A\Rightarrow\forall z,\chi_{A_p}(z)\to\chi_A(z)+$distance

C-VII. La réduction en général

Décomposition de Jordan : $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_A$ scindé $\Rightarrow A$ semblable à $\begin{pmatrix}J_{n_1\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_2\lambda_2}\end{pmatrix}$ où $J_{m\lambda}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Frobenius : A est semblable à $\begin{pmatrix}C_{P_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_k}\end{pmatrix}$ où C_P matrice compagnon de P et $P_1|P_2|...|P_k$