Chap 18 : Systèmes linéaires

I. Généralités

$(a_{ij})\in\mathbb{K}^{mn}$ coefficients, $A=[a_{ij}]$ matrice et $B={}^t(b_1\ldots b_m)$ second membre du système $(\mathbb{S})\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ \ldots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$

$\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ \ldots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ système homogène associé En résumé : $AX=B \quad AX=0$

Interprétations : Opérateur / Formes linéaires / Intersection d'hyperplans affines

S solutions du système $(\mathbb{S})$, S_0 solutions du système homogène. $(\mathbb{S})$ est compatible lorsque $S\neq\varnothing$

Si $(\mathbb{S})$ est compatible, l'ensemble des solutions de $\mathbb{S}$ est un espace affine dirigé par S_0

Le rang du système est celui de A $\Rightarrow \dim S_0=n-\operatorname{rg}A=\dim S$ (si non vide)

II. Systèmes de Cramer

$m=n \quad AX=B$ est dit de Cramer lorsque A est inversible

On a équivalence entre : $-(\mathbb{S})$ est de Cramer $\quad -S_0=\{0\}$
$-\forall B,(\mathbb{S})$ possède une unique solution $\quad -\forall B,(\mathbb{S})$ possède au plus unique solution

Formule de Cramer : si A est inversible, la solution de $AX=B$ est donnée par

$$\forall i\in\ 1,n\ ,\ x_i=\frac{1}{\det A}\det(C_1,\ldots,C_{i-1},B,C_{i+1},\ldots,C_n)$$

Hadamard : $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq, $\forall i,|a_{ii}|\geq\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\Rightarrow A$ inversible ($AX=0$, sol $X\neq0$, $|x_{i_0}|=\|X\|_\infty\Rightarrow|a_{i_0i_0}x_{i_0}|\leq|x_{i_0}|\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0j}|$)

$$n=2,\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}\rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}c&b\\c'&b'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a&c\\a'&c'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}}$$

III. Critère de compatibilité

$(\mathbb{S})$ compatible $\Leftrightarrow\operatorname{rg}(C_1\ldots C_n,B)=\operatorname{rg}A\Leftrightarrow$ Tous les mineurs bordants faisant intervenir B sont nuls

$\rightarrow(x_1\ldots x_r)$ inconnues principales, déterminées par un système de Cramer

IV. Application aux valeurs propres

λ valeur propre de $A\Leftrightarrow\operatorname{rg}(A-\lambda I)\leq n-1$

Pour trouver un vecteur propre, on résout $(A-\lambda I)X=0$

$^{(I)}\lambda$ val. propre simple $\Rightarrow\operatorname{rg}(A-\lambda I)=n-1\Rightarrow$ On fixe une inconnue puis : $\operatorname{rg}(A-\lambda I)=1$

$\Rightarrow$ Une colone $\neq0$ de $A-\lambda I$ fournit le vecteur propre cherché