Chap 17 : Eléments algébriques

I. Action de K[X]

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, A est une $\mathbb{K}-$algèbre unitaire associative

$a \in A \quad \varphi_a \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to A \\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k \end{cases}$ est un morphisme d'algèbre d'image $\mathbb{K}[a]$

L'idéal annulateur de a est alors $I_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\} = \ker \varphi_a$

Lorsque $I_a \neq \{0\}$, il possède un unique générateur normalisé μ_a, appelé polynôme minimal de a

Lorsque $I_a = \{0\}$, φ_a est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$

Si $a \in \mathbb{C}$, et $I_a = \{0\}$ on dit alors que a est transcendant

Si $I_a \neq \{0\}, \forall P \in \mathbb{K}[X], P(a) = 0 \Leftrightarrow \mu_a \mid P$

$a \in A.\quad \mathbb{K}[a] = Vect_k(a^k) = \{P(a) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est de dim finie $\Leftrightarrow I_a \neq \{0\}$ Dans ce cas, $\dim \mathbb{K}[a] = \deg \mu_a$

Si $I_a \neq \{0\}$ et A est intègre, μ_a est irréductible et $\mathbb{K}[a]$ est un corps

$1. \Leftarrow b = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k = P(a) \in \mathbb{K}[a], DE \to P(a) = R(a)...$ 2.Inverse : Bezout Polynômes

II. Les nombres algébriques

$\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$ Sous corps de $\mathbb{C}$

$a \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tq $P(a) = 0$ Sinon, il est transcendant

Base téléscopique : $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ Si $\mathbb{L}$ est de dim. finie sur $\mathbb{K}$, et $\mathbb{M}$ est de dim. finie sur $\mathbb{L}$,

alors $\mathbb{M}$ est de dim. finie sur $\mathbb{K}$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{L}} \mathbb{M}$

Avec ce qui a été vu sur les algèbres, a est algébrique sur $\mathbb{K}$ *ssi* $\mathbb{K}[a]$ est de dim finie.

Dans ce cas, μ_a est irréductible sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}[a]$ est un corps

$^{//HP//}$ $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$. L'ensemble des $a \in \mathbb{C}$ algébriques sur $\mathbb{K}$, noté $\overline{\mathbb{K}}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$

Inverse $\to X^n P(1/X)$, Somme : $a, b \in \overline{\mathbb{K}}^2, \mathbb{L} = \mathbb{K}[a], \mathbb{M} = \mathbb{L}[b], \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M}$ finie, $\mathbb{K}[a+b]$ sev de $\mathbb{K}[a,b] = \mathbb{M} \Rightarrow \mathbb{K}[a+b]$ de dim finie

$\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ corps, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_1 ... \sigma_n$ mph de corps 2 à 2 $\neq$, $\mathbb{K} \to \mathbb{L}$ $\Rightarrow (\sigma_1 ... \sigma_n)$ est libre dans de $\mathbb{L}-ev$ $\mathfrak{F}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$

(Rec, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i = 0 \to \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sigma_i(x)(\sigma_i(y) - \sigma_n(y)) = 0 \quad \sigma_1 - \sigma_n \neq 0 ... \sigma_{n-1} - \sigma_n \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = 0$)