Chap 15 : Dualité

$\mathbb{K}$ corps commutatif, E $\mathbb{K}-ev$

I. Formes linéaires et hyperplans

$E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé dual de E, ses éléments sont appelés formes linéaires sur E

Si $\varphi \in E^*\backslash\{0\}$, φ est surjective

H sev de E, on a équivalence entre : $-$ H est maximal parmi les sev stricts
- Il existe une droite Δ de E tq $H \oplus \Delta = E$
- $H \neq E$ et $\forall a \in E \setminus H$, $H \oplus \mathbb{K}a = E$
- $\exists \varphi \in E^*\backslash\{0\}$ tq $H = \ker\varphi$
- Si E est de dimension finie, $\operatorname{codim} H = 1$

H est alors un hyperplan de E

$^{(I)}E = \mathbb{K}^n$ Toute forme linéaire s'écrit de manière unique $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. $H = \{x \in \mathbb{K}^n, a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$

$\mathbb{K}$ cps infini, $F_1...F_p$ sev stricts $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{p} F_k \neq E$ $(\ker\varphi_i = H_i \supset F_i$. Rec : $x \in E \backslash \bigcup_{i=1}^{p-1} H_i, y \notin H_p, \exists \lambda, \varphi_i(\lambda x + y) \neq 0...)$

II. Crochet de dualité, bases duales

Pour $(x,\varphi) \in E \times E^*$, on note $\langle x,\varphi\rangle = \varphi(x)$

$\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire sur $E \times E^*$. $j\begin{cases} E \to E^{**} \\ x \mapsto \langle x, \bullet\rangle \end{cases}$ est linéaire injective, $j(x) = \delta_x : \varphi \mapsto \varphi(x)$

En dimension infinie, j n'est jamais surjective : Si $E \simeq \mathbb{K}^{(I)}$, $\dim E^* = (\operatorname{card}(\mathbb{K}))^{\operatorname{card} I}$

E de dim finie $n \geq 1$

$\beta = (e_1...e_n)$ base de E. On définit, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i^* \in E^*$ par : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

$(e_1^*...e_n^*)$ est une base de E, appelée base duale de E $\qquad \dim E^* = n = \dim E$

Faux en dim. infinie : sur $\mathbb{R}[X]$: $\varphi : \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ $\quad e_i^*(P) = a_i$ Si $\varphi = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k e_k^*$, $\varphi(X^{N+1}) = 0$ non !

(e) base de $\mathbb{K}^n$, (ε) base canonique $P = [(e)]_{(\varepsilon)}$ $\quad Q = [(e^*)]_{(\varepsilon^*)}$ $\quad Q = {}^tP^{-1}$

Base antéduale : $(\varphi_1...\varphi_n)$ base de E^*, il existe une unique base $(e_1...e_n)$ de E tq, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i = e_i^*$

III. Orthogonalité

$A \subset E, B \subset E^*$ $\qquad (A^\perp =)A^\circ = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\} = \{\varphi \in E^* \mid A \subset \ker\varphi\} = \bigcap_{x\in A} \ker(\langle x, \bullet\rangle)$

$({}^\perp B =)B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\} = \bigcap_{\varphi\in B} \ker\varphi$ $\qquad B^\bullet = \{\psi \in E^{**} \mid \forall \varphi \in B, \psi(\varphi) = 0\}$

$A, A' \subset E$ $\qquad A^\circ$ sev de E $\qquad A \subset A' \Rightarrow A'^\circ \subset A^\circ$ $\qquad A^\circ = Vect(A)^\circ$

$A \subset A^{\circ\circ} = ({}^\perp A^\perp)$ $\qquad A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$

E de dim finie : $-$ F sev de E : $\dim F^\circ = \dim E - \dim F$ $\quad F = F^{\circ\circ}$

$-$ G sev de E^* $\quad \dim G^\circ + \dim G = \dim E$ $\quad G = G^{\circ\circ}$

$-$ $\varphi_1 ... \varphi_p \in E^*$ $\quad \varphi \in Vect(\varphi_1 ... \varphi_p) \Leftrightarrow \bigcap_{i \in 1,p} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$ $\quad G^\circ = \bigcap \ker \varphi_i \subset \ker \varphi \Rightarrow \varphi \in G^{\circ\circ} = G$

Si $\mathrm{rg}(\varphi_1 ... \varphi_p) = r,\ \dim \bigcap_{i \in 1,p} \ker \varphi_i = \dim(Vect(\varphi_1 ... \varphi_p)^\circ) = n - r$

Complément

E $\mathbb{K}-ev$ de dim qcq, $\varphi_1 ... \varphi_p \in E^*$: $(\varphi_1 ... \varphi_p)$ libre $\Leftrightarrow \phi \begin{cases} E \to \mathbb{K}^p \\ x \mapsto (\varphi_1(x) ... \varphi_p(x)) \end{cases}$ surj. (sinon, $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \{\sum \lambda_i y_i = 0\}$)

$\Rightarrow \varphi_1 ... \varphi_p$ libre $\Rightarrow \exists (x_1 ... x_p), \forall (i,j),\ \varphi_i(x_j) = \delta_{i\,j}$

$(\varphi_1 ... \varphi_p)$ libre $\Rightarrow$ $\quad \varphi \in Vect(\varphi_1 ... \varphi_p) \Leftrightarrow \ker \varphi \subset \bigcap_{i \in 1,p} \ker \varphi_i$

Trace : $\begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A \quad \mapsto (M \mapsto \mathrm{tr}(AM)) \end{cases}$ est un isomorphisme (montrer surj avec la base)

H hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing$ $\quad$ ($\ker \varphi$, $\uparrow$ et decomp° p/r rang)