Chap 14 : Matrices

I. Généralités

$\mathbb{K}$ corps commutatif, I, J ensembles finis non vides totalement ordonnés.

$\mathfrak{M}_{I,J}(\mathbb{K}) = \mathfrak{F}(I \times J, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-ev$ (lorsqu'il est muni des lois naturelles).

Pour $A \in \mathfrak{M}_{I,J}(\mathbb{K})$, $A(i,j)$ est le coefficient d'indice (i,j) de $A = [a_{ij}]_{(i,j)\in I\times J}$

$(E_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ de $\mathfrak{M}_{IJ}(\mathbb{K})$ définie par $E_{i,j}(i,j) = 1$ et $E_{ij}(k,l) = 0$ (si $(k,l) \neq (i,j)$) est une base de $\mathfrak{M}_{IJ}(\mathbb{K})$

$\dim \mathfrak{M}_{I,J}(\mathbb{K}) = |I||J|$ Si $I = J = [\![1,n]\!]$, $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $P(A) = \sum_{k=1}^{n} a_k A^k$ $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ P \mapsto P(A) \end{cases}$ est un mph d'algèbres

II. Matrice d'un endomorphisme

E, F $\mathbb{K}-ev$ de dim n et m, $u \in \mathfrak{L}(E,F)$, $(e) = (e_1 \dots e_n)$ base de E, $(f) = (f_1 \dots f_m)$ de F

On écrit pour $j \in [\![1,n]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$ $A = (a_{ij}) = \mathfrak{Mat}_{(e),(f)}(u) = [u]_{(e)}^{(f)} \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$(x,y) \in E \times F$, $X = [x]_{(e)}$, $Y = [y]_{(e)}$ $y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$, et A est l'unique matrice de $\mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K})$ vérifiant cette équivalence pour tout $(x,y) \in E \times F$: $\begin{cases} \mathfrak{L}(E,F) \to \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto [u]_{(e)}^{(f)} \end{cases}$ est un isomph

(g) base de G de dim finie. $v \in \mathfrak{L}(F,G)$ $[v \circ u]_{(e)}^{(g)} = [v]_{(f)}^{(g)} \times [u]_{(e)}^{(f)}$

$A \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Le rang de A est celui de ses vecteurs colonne. Si $f_A = \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f_A)$

Si $[u]_{(e)}^{(f)} = A$, $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A$ || $A, B \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K})^2$ $\operatorname{rg}(A+B) \le \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$

$P \in GL_n(\mathbb{K}), Q \in GL_m(\mathbb{K})$ $\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(AQ)$ || $B \in \mathfrak{M}_{pm}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(BA) \le \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$

III. Matrices inversibles

$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre : – A est inversible – A est inversible à gauche/droite

– A est régulière à gauche / droite – $\operatorname{rg} A = n$ – A représente un isomph

– $\forall Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ possède une unique solution

– $\det A \neq 0$ – ${}^tA$ est inversible

IV. Changement de bases, équivalence

$(e), (e')$ bases de E, $(f), (f')$ bases de F

$P = \mathfrak{Mat}_{(e)}(e')$, $Q = \mathfrak{Mat}_{(f)}(f')$ matrices de passage. $x \in E$, $X = [x]_{(e)}$, $Y = [y]_{(f)}$, $X' = [x]_{(e')}$, $Y' = [y]_{(f')}$

$X = PX'$ $Y = QY'$ Si $A = [u]_{(e)}^{(f)}$, $B = [u]_{(e')}^{(f')}$, $B = Q^{-1}AP$

A et $B \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K})^2$ sont équivalentes lorsqu'il existe $(R,S) \in GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tq : $B = RAS$

C'est une relation d'équivalence. Deux matrices sont équivalentes *ssi* elles représentent un même endomorphisme dans 2 bases différentes

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r. Il existe une base (e) de E et une base (f) de F tq $[u]_{(e)}^{(f)} = J_{mn}^r = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ r

Deux matrices de $\mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K})$ sont équivalentes *ssi* elles ont le même rang

$\forall M \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^tM$

A et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $B = P^{-1}AP$. C'est une relation d'équivalence

Si A est semblable à B, $\det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ Si $f \in \mathbb{K}[X]$, $f(B) = P^{-1} f(A) P$

$P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto P^{-1}AP$ est un automph d'algèbre.
Il y a une infinité de classes de similitudes dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

V. Déterminants

$A = [a_{ij}]_{i,j \in 1,n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$

$\det {}^tA = \det A$ $\det AB = \det A \det B$ $\det \begin{pmatrix} A_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{p} \det A_k$

Comatrice : $C_{ij} = \det \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & \times & & \\ \times & \times & \times & \\ & \times & & \end{pmatrix} \end{array} i$, $com(A)[(-1)^{i+j} C_{ij}]$, $\tilde{A} = {}^t com(A)$, $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det A \times I_n$

$^{(I)}$Cette identité reste valable dans un anneau commutatif :

si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$, A est inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ *ssi* $|\det A| = 1$

$^{(I)}A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\operatorname{rg} A \leq n-2, \tilde{A} = 0$ Si $\operatorname{rg} A = n-1$, $\operatorname{rg} \tilde{A} = 1$

Van der Monde : $VdM(x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ (Rec, $L_i \leftarrow L_i - x_n L_{i-1}$)

Cauchy : $a_1 \dots a_n, b_1 .. b_n \in \mathbb{K}$ tq $a_i + b_j \neq 0$ $\det \left[\dfrac{1}{a_i + b_j} \right] = \dfrac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + b_j)}$

Hurcwicz : $\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix} = \dfrac{a \prod_{i=1}^{n} (x_i - a) - b \prod_{i=1}^{n} (x_i - b)}{a - b}$ $(\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1 + t & b+t & \cdots & b+t \\ a+t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+t \\ a+t & \cdots & a+t & x_1 + t \end{vmatrix}$ affine (dvt))

VI. Trace

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A(i,i)$ $\quad || \quad \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA), \quad \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$

$u \in \mathcal{L}(E)$ $\quad \operatorname{tr}([u]_\beta)$ ne dépend pas de la base de u, on le note $\operatorname{tr} u$ $\quad u \mapsto \operatorname{tr} u$ est linéaire

Si p proj de E et $car\mathbb{K} = 0$, $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$

$^{(I)}\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, E$ $\mathbb{K}-ev, G$ ss-gpe fini de $GL_n(\mathbb{K})$. $\quad p = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g$ est un projecteur de $\mathbb{K}^n$ commutant avec G

$F = \{x \in \mathbb{K}^n \,/\, \forall g \in G, g(x) = x\}$ $\quad \dim F = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$

H sev de $\mathbb{K}^n$ stable par $G \Rightarrow H$ possède un supp. stable par G

VII. Matrices extraites, mineurs

$m, n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), I \subset [\![1,m]\!], J \subset [\![1,n]\!], I \times J \neq \varnothing$

La $(I,J)-$matrice extraite de A est la restriction de A à $I \times J$, notée A_{IJ}

$^{//HP//} A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ $\quad -$ Si $r = \operatorname{rg} A \geq 1$, il existe $I \subset [\![1,m]\!]$ et $J \subset [\![1,n]\!]$, $|I| = |J| = r$ tel que la $(I,J)-$matrice extraite de A soit inversible. De plus, pour tout $s > r$, toute $(s,s)-$matrice extraite de A est non inversible (singulière)

$-$ Si A possède une $(I,J)-$matrice extraite inversible, avec $|I| = |J| = r$, et si, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $j \in [\![1,n]\!]$, la $\underbrace{(I \cup \{i\}, J \cup \{j\})-\text{matrice extraite de } A}_{\text{Matrice bordante de } A_{IJ}}$ est singulière, $\operatorname{rg} A = r$

Les mineurs d'une matrice sont les déterminants des matrices carrées extraites de A

Si $\operatorname{rg} A = r$, A possède un mineur de taille r non nul, et tout mineur de taille $> r$ est nul (et réciproq^t).
Si A possède un mineur de taille r dont tous les bordants sont nuls, $\operatorname{rg} A = r$
Le rang d'une manitre de dépend pas du corps de base

VIII. Transvections et génération du groupe linéaire

$n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{K}$ corps comm.

$SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \det M = 1\}$ est un sous groupe distingué de $GL_n(\mathbb{K})$
Pour $i \neq j$, $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ matrice de transvection

$\forall i \neq j, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2$, $T_{ij}(\lambda) T_{ij}(\mu) = T_{ij}(\lambda + \mu)$ et donc $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$
Actions sur une matrice : $\quad - T_{ij}(\lambda)A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \qquad - AT_{ij}(\lambda) : C_j \leftarrow \lambda C_i$

$A \in GL_n(\mathbb{K})$. Il existe des matrices de transvection $T_1 ... T_u, T_1' ... T_v'$ tq $T_1 \times ... \times T_u \times A \times T_1' \times ... \times T_v' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \det A \end{pmatrix}$

Tout élément de $SL_n(\mathbb{K})$ est produit de matrices de transvection

Pivot : $A(1,1) \leftarrow 1$ par action à gauche : terme $\neq 0$ en $(2,1) ... + rec$

IX. Matrices et analyse fonctionnelle

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Rappels : $\|A\|_\infty = \sup |A(i,j)|$ munit $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ d'une norme qui en fait un espace produit $\simeq \mathbb{K}^{mn}$

$A_p \xrightarrow{p\to+\infty} A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\ A_p(i,j) \to A(i,j)$ Les opérations sont continues

Dans $GL_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$ est continue (frac. rat à plusieurs indéterminées)

N, N' deux normes sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$, la norme d'opérateur de $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ est $\sup\limits_{\substack{N(x)\le 1\\ x\in\mathbb{K}^n}} N'(Ax)$

Si $m = n$ et $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, $\|A\| = \sup\limits_{\|X\|\le 1} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ (atteint par compacité de la sphère unité de $\mathbb{K}^n$)

$\|X\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{j\in[\![1,n]\!]} \|C_j\|_1$ $\|X\|_\infty = \sup |x_i| \Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \|L_i\|_1$

Si $P = Conv(a_1 \ldots a_s)$, et si $f : P \mapsto R$ est convexe, $\max\limits_P f = \max(f(a_1)\ldots(f(a_s))$

$GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (densité : par équivalence à J^r_{mn} et limite)

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $AB = \tilde{B}\tilde{A}$ (vrai sur $GL_n(\mathbb{K})$ + continuité de $(A,B) \mapsto AB - \tilde{B}\tilde{A}$)

L'ensemble R_s des matrices de rang $\le s$ est fermé dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ ($\mathcal{C}°$ des mineurs + intersection)

L'ensemble P_s des matrices de rang s vérifie $\overline{P_s} = R_s$

$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \det M = 0\}$ est connexe (étoilé)

$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe pour $n \ge 1$

$SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (transvections $T(t\lambda)$)

$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe

Utile : – calcul du déterminant : prendre un terme, et soustraire toute une colonne multipliée par ce terme