Chap 13 : Algèbre linéaire

I. Familles libres, familles liées, bases

I ensemble, $\mathbb{K}$ corps commutatif.

$\mathbb{K}^I = \mathfrak{F}(I,\mathbb{K})$ $\mathbb{K}^{(I)} = \{(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I / \operatorname{supp}(\lambda_i) = \{i \in I / \lambda_i \neq 0\}$ est fini$\}$ (ce sont des $\mathbb{K}-ev$)

E $\mathbb{K}-ev$, $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum\limits_{i\in \operatorname{supp}(\lambda_i)} \lambda_i x_i$

$x = (x_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ $\varphi_x \begin{cases} \mathbb{K}^{(I)} \to E \\ (\lambda_i) \mapsto \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i \end{cases}$ est linéaire, son image est $Vect(x_i)_{i\in I}$

$(a_i) \in E^I$ est $\begin{cases} \text{libre si } \varphi_a \text{ est injective (liée, sinon)} \\ \text{génératrice si } \varphi_a \text{ est surjective} \\ \text{une base de } E \text{ si } \varphi_a \text{ est un isomorphisme} \end{cases}$

$0 \in (a_i)$ ou $\exists k \neq j, a_k = a_j \Rightarrow (a_i)$ liée.

Une sous-famille d'une famille libre est libre. Une sur-famille d'une famille liée est liée

Une base est une famille génératrice minimale

E,F $\mathbb{K}-ev$, $(e_i)_{i\in I}$ base de E. $(f_i)_{i\in I} \in F^I$ $\exists! \varphi \in \mathfrak{L}(E,F), \forall i \in I, \varphi(e_i) = f_i$

φ injective $\Leftrightarrow (f_i)_i$ libre φ surjective $\Leftrightarrow (f_i)_i$ génératrice φ isomorphisme $\Leftrightarrow (f_i)_i$ base

Liberté de famille de fonctions $\to$ Analyse locale : équivalents/limites, développement limité

$^{(I)}$Polynômes de Hilbert : $H_0(X) = 1, H_n(X) = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$ $H_n(X+1) - H_n(X) = H_{n-1}(X)$

$\forall P \in \mathbb{R}[X], d = \deg P,$ $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists (\lambda_1 \ldots \lambda_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}, P = \sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k H_k \Leftrightarrow \exists a_0, \forall k \in [\![0,d]\!], P(a_k) \in \mathbb{Z}$

II. Théorie de la dimension finie

Si E possède une base finie $(e_1 \ldots e_n)$, toute famille $(x_1 \ldots x_p)$ avec $p \geq n+1$ est liée

Pas dans $\mathbb{Z}^n$: $(2,3)$ est génératrice, mais ne contient pas de base

F et G sev du $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie E. Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$

III. Endomorphismes et dimension finie

E,F $\mathbb{K}-ev$

$u \in \mathfrak{L}(E,F), H$ un supplémentaire de $\ker u$ dans E. $u\big|_H^{\operatorname{Im} u} \begin{cases} H \to \operatorname{Im} u \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ est un isomorphisme

Thm du rang : $u \in \mathfrak{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, $\operatorname{Im} u$ aussi et $\dim(\ker u) + \dim(\operatorname{Im} u) = \dim E$

Si E et F ont la même dimension, $u \in \mathfrak{L}(E,F)$ surjective $\Leftrightarrow$ injective $\Leftrightarrow$ isomorphisme

Faux en dimension infinie, même si $E = F$ (dérivation des polynômes...)

Interpolation de Lagrange : $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 distincts, $a_1 \ldots a_n \in \mathbb{K}$.

$$\exists ! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] / \forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = a_i \qquad L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}, P = \sum_{k=1}^{n} a_k L_k$$

Interpolation d'Hermite : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, x_1 \ldots x_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 distincts, $a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_n \in \mathbb{K}$

$$\exists \triangle \mathbb{P} \in \mathbb{K}_{2n-1}[X], \forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = a_i \text{ et } P'(x_i) = b_i \qquad (P \mapsto (P(x_i), P'(x_i))_i \text{ inj})$$

$^{(I)} A$ $\mathbb{K}-$algèbre asso. unitaire intègre. A de dim. finie $\Rightarrow A$ est un corps $\quad (x \mapsto ax$ lin, inj $\Rightarrow$ bij$)$

IV. Rang

E et F $\mathbb{K}-ev$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang fini lorsque $\operatorname{Im} u$ est de dim. finie. Alors, $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$

E de dim finie, de base $(e_1 \ldots e_n) \Rightarrow \forall u \in \mathcal{L}(E,F), \exists \operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u(e_1) \ldots u(e_n))$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang fini, $w \in \mathcal{L}(E',E)$, $v \in \mathcal{L}(F,F') \Rightarrow v \circ u$ et $u \circ w$ sont de rang fini et :

$r(u \circ w) \leq \operatorname{rg}(u)$ et $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg}(u)$, avec égalité si w / v est un isomorphisme

$\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v)$ *ssi* $\operatorname{Im} v \cap \ker u = \{0\}$ $\|$ $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$ *ssi* $\operatorname{Im} v + \ker u = E$ $\|$ $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u - v)$

V. Sommes, sommes directes

$E_1 \ldots E_p$ $\mathbb{K}-ev$ de dim finie. $E_1 \times \ldots \times E_p$ est de dim finie, $\dim(E_1 \times \ldots \times E_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k$

$F_1 \ldots F_p$ sev du $\mathbb{K}-ev$ E $\qquad j \begin{cases} F_1 \times \ldots \times F_p \to E \\ (x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_1 + \ldots + x_p \end{cases}$

La somme de $F_1 \ldots F_p$ est $\operatorname{Im} j$, notée $\sum_{j \in [\![1,p]\!]} F_j$. $\qquad \sum_{j \in [\![1,p]\!]} F_j = Vect\left(\bigcup_{i \in [\![1,p]\!]} F_i \right)$

$F_1 \ldots F_p$ sont en somme directe lorsque j est injective : c'est alors un isomorphisme : $F_1 \times \ldots \times F_p \mapsto \sum_{j \in [\![1,p]\!]} F_j$

On note alors $\bigoplus_{j \in [\![1,p]\!]} F_j = \sum_{j \in [\![1,p]\!]} F_j$, et on dit que $F_1 \ldots F_p$ sont supplémentaires lorsque $\bigoplus_{j \in [\![1,p]\!]} F_j = E$

$F_1 \ldots F_p$ en somme directe $\Leftrightarrow \forall (x_1 \ldots x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p, x_1 + \ldots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_p = 0$

F et G sont en somme directe *ssi* $F \cap G = \{0\}$

$F_1 \ldots F_p$ sont en somme directe *ssi* $\forall j \in [\![2,p]\!], (F_1 + \ldots + F_{j-1}) \cap F_j = \{0\}$

$F_1 \ldots F_p$ de dimension <u>finie</u>

$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \qquad \dim\left(\bigoplus_{j \in [\![1,p]\!]} F_j \right) = \sum_{j=1}^{p} \dim F_j$

Si β_j est une base de F_j, $\beta = \beta_1 \cup \ldots \cup \beta_p$ est une base de $\bigoplus_{j \in [\![1,p]\!]} F_j$

Si $\dim \sum F_j = \sum \dim F_j$, la somme est directe

$E=F_1\oplus...\oplus F_p$, G $\mathbb{K}-ev.$ $\begin{cases}\mathscr{L}(E,G)\to\prod_{i=1}^{p}\mathscr{L}(F_i,G)\\ u \mapsto (u_{\backslash F_1}...u_{\backslash F_p})\end{cases}$ est un isomorphisme

$^{(I)}$ Familles de projecteurs : $E=\bigoplus_{j\in [\![1,p]\!]} F_j$, $p_{i\backslash F_j}=0, \forall j\neq i, p_{i\backslash F_i}=Id_{F_i}$

Si $(p_i)\in\mathscr{L}(E)^n$ sont tels que $\forall i\neq j, p_i\circ p_i=p_i,\ p_i\circ p_j=0,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=Id_E$, c'est une famille de projecteurs

VI. Quelques classes d'endomorphismes

Si $\lambda\in\mathbb{K}^*, h_\lambda\begin{cases}E\to E\\ x\mapsto\lambda x\end{cases}$ est $\mathbb{K}-$linéaire $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{K}^*}$ est un sous-groupe de $GL(E)$

$^{//HP//}$Lemme de Schur : $u\in\mathscr{L}(E)$ non nulle. u est une homothétie $\Leftrightarrow\forall x\in E$, $(x,u(x))$ est liée

$p\in\mathscr{L}(E)$ est un projecteur lorsque $p\circ p=p$ (idempotence)

Si $p\in\mathscr{L}(E)$ est un projecteur, alors c'est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$

$u\in\mathscr{L}(E)$ est une involution lorsque $u\circ u=Id_E$ $\|$ $F\oplus G=E, s\begin{cases}F\oplus G\to E\\ x+y\mapsto x-y\end{cases}$ est la symétrie p/r F de dir. G

$\operatorname{car}\mathbb{K}\neq 2$ Si $u\in\mathscr{L}(E)$ est une involution, c'est la symétrie p/r $F=\ker(u-Id_E)$ de direction $G=\ker(u+Id_E)$

p,q proj. $u\circ p-p\circ u=0\Leftrightarrow u$ laisse stable $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$. $\|$ $\operatorname{car}\mathbb{K}\neq 2$ $p+q$ proj $\Leftrightarrow p\circ q=q\circ p=0$

u involution, $\operatorname{car}\mathbb{K}\neq 2$, $u\circ v=v\circ u=0\Leftrightarrow v$ laisse stable $\ker(u-Id)$ et $\ker(u+Id)$

$Z(GL(E))=\{v\in GL(E),\forall u\in GL(E), u\circ v=v\circ u\}=\{\text{homothéties}\}$

$^{//HP//}$$E$ de dim finie. $u\in\mathscr{L}(E)$. pour $p\in\mathbb{N}$, on note $K_p=\ker(u^p)$ et $F_p=\operatorname{Im}(u^p)$. Il existe $r\in\mathbb{N}$ tq :

$K_0\subsetneq...\subsetneq K_r=K_{r+1}=...$ et $F_0\supsetneq...\supsetneq F_r=F_{r+1}=...$ (Thm du rang)

$u\in\mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $u^p=0$

Si $r=\min\{p\in\mathbb{N}/K_p=K_{p+1}\}$, on trouve $\{0\}\subsetneq...\subsetneq K_r=E$ r est l'ordre de nilpoitence de u

$x\in E, u^{p-1}(x)\neq 0, u^p(x)=0\Rightarrow(x,u(x)...u^{p-1}(x))$ libre u nilpotent $\Rightarrow u^{\dim E}=0$

$n=\dim E$ u nilp. d'ordre $n\Leftrightarrow\exists\mathfrak{B}$ base de $E,[u]_{\mathfrak{B}}=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\dim\ker u=1\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!], \dim\ker u^i=i$