

Chap 1 : Espaces vectoriels normés

Inégalités classiques

Cauchy-Schwarz : $\forall ((u_i)_i, (v_i)_i) \in (\mathbb{C}^n)^2 \quad \left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}$

Minkowski (I) : $\forall ((u_i)_i, (v_i)_i) \in (\mathbb{C}^n)^2 \quad \left(\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}$ (mettre ² + CS)

$$\max_{(x_i) \in [0,1]^n} \sum_{i \neq j} x_i x_j = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\forall (p, q) \in]1; +\infty[^2 \text{ tq } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$$

Hölder : $(p, q) \in]1; +\infty[^2 \text{ tq } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\forall ((u_i)_i, (v_i)_i) \in (\mathbb{C}^n)^2 \quad \left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{1/q} \quad (\text{lemme } \uparrow \text{ sur } \frac{x_i}{(\sum x_i^p)^{1/p}} \frac{y_i}{(\sum x_i^q)^{1/q}})$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, S = \left\{ (y_i)_i \in \mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^n y_i^q = 1 \right\} \quad (x_i)_i \in \mathbb{R}_+^n \Rightarrow \max_{(y_i)_i \in S} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \quad \left(y_i = \frac{x_i}{(\sum x_i^p)^{1/q}} \right)$$

Minkowski (II) : $p \in]1; +\infty[\quad \forall ((u_i)_i, (v_i)_i) \in (\mathbb{C}^n)^2 \quad \left(\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$

Inégalité arithético-géométrique : $\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$

I. Normes

E est un \mathbb{K} -ev avec $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

(N₁) $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation)

(N₂) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

(N₃) $\forall (x, y) \in E^2 \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (sous-additivité / inégalité triangulaire)

(E, N) est alors un espace vectoriel normé (evn)

Une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant (N₁) et (N₂) est une semi-norme

* Convexité : $\forall \lambda \in [0,1], \forall (x, y) \in E^2 \quad N(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda N(x) + (1-\lambda)N(y)$

* $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ N est 1-lipschitzienne pour elle-même

* Sur la droite $\mathbb{K}x$, il y a 2 vecteurs normés si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une infinité si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (cercle unité)

Sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C}), a < b \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f| \quad (\text{CV en moyenne}) \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{CV en moyenne quad})$

$\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sont des semi-normes sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C})$, ce sont des normes sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

Une distance sur X (ensemble) est une application $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$(d_1) \quad \forall (x, y) \in X^2 \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(d_2) \quad \forall (x, y) \in X^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(d_3) \quad \forall (x, y, z) \in X^3 \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

(X, d) est alors un espace métrique

II. Boules, sphères, parties bornées

$(E, \|\cdot\|)$ evn. Sur E^2 , on pose $d(x, y) = \|x - y\|$ (X, d) espace métrique

Soient $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+$ (i) $r > 0$ La boule ouverte de centre a et de rayon r : $\mathcal{B}(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}$

(ii) La boule fermée de centre a et de rayon r : $\overline{\mathcal{B}}(a, r) = \{x \in E / d(a, x) \leq r\}$

(iii) La sphère de centre a et de rayon r : $S(a, r) = \{x \in E / d(a, x) = r\}$

Soit $A \subset X$. On a équivalence entre :

(1) Il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(a, R)$ de X qui contient A

(2) $\forall a \in X, \exists R > 0$ tq $A \subset \mathcal{B}(a, R)$

(3) $\{d(x, y) / (x, y) \in A^2\}$ est borné

On dit alors que A est une partie bornée de X

Diamètre d'une partie bornée A de X : $diam(A) = d(A) = \sup_{(x, y) \in A^2} d(x, y) \in \mathbb{R}_+$ $diam(\emptyset) = 0$

La notion de borné dépend de la norme en dimension infinie

III. Fonctions bornées, lipschitziennes

X ensemble, E evn. Une fonction $f : X \rightarrow E$ est bornée si : $\exists M > 0$ tq $\forall x \in X, \|f(x)\| \leq M$

On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$

$$E = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ maj} : \exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in X, f(x) \leq M \\ f \text{ bornée} \Leftrightarrow f \text{ maj et min} \end{cases}$$

$(x_n)_n$ est bornée si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$

Si $(x_n)_n$ non bornée, $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ st^t croissante tq $\|x_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

En dimension infinie, la notion de convergence dépend de la norme

$A \subset (E, \|\cdot\|_E)$ evn, $(F, \|\cdot\|_F)$ evn. $f : A \rightarrow F$ est k -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E \quad k \text{ est le rapport de Lipschitz de } f$$

IV. Convergence des suites dans un evn

$(E, \|\cdot\|)$ evn

$(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ converge lorsqu'il existe $l \in E$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \|x_n - l\| \leq \varepsilon$

(x_n) CV vers $l \Leftrightarrow (\|x_n - l\|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans \mathbb{R}

La limite est unique, si elle existe : on la note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Une suite convergente est bornée. La limite suit les combinaisons linéaires.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Une algèbre $(A, +, \cdot, *)$ est telle que

$(A, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev

$*$ est une application bilinéaire de $A \times A$ vers A

$l.e : \forall x \in A, y \mapsto x * y$ est linéaire, $y \mapsto y * x$ aussi, et $*$ se développe comme un produit (non commutatif)

L'algèbre est commutative si $*$ l'est, associative si $*$ l'est, unitaire si $*$ admet un élément neutre

$(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée si $(A, \|\cdot\|)$ est un evn et : $\forall (x, y) \in A^2, \|x * y\| \leq \|x\| \|y\| \quad (\Leftrightarrow \|x^n\| \leq \|x\|^n)$

$\mathfrak{B}(X, \mathbb{K}) = \{f \in \mathfrak{F}(X, \mathbb{K}) \text{ bornée}\}$ munie des lois naturelles et de $\|\cdot\|_\infty$

A algèbre normée. $((x_n)_n, (y_n)_n) \in (A^n)^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l' \Rightarrow x_n * y_n$ converge vers $l * l'$

V. Convergence dans les espaces de fonctions

X ensemble, E evn

$(f_n)_n \in \mathfrak{F}(X, E)^{\mathbb{N}}$ converge simplement si, $\forall x \in X, (f_n(x))_n$ converge

$f \begin{cases} X \rightarrow E \\ x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \end{cases}$ est la limite simple de $(f_n)_n$

Convergence simple $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_{x,\varepsilon}, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

$(f_n)_n \in \mathfrak{F}(X, E)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f lorsque :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad (\Leftrightarrow \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$

La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est FAUSSE

$f_n \xrightarrow{CVU} f \Leftrightarrow \begin{cases} f_n - f \text{ bornée à partir d'un certain rang} \\ \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \end{cases}$

$(f_n)_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ lorsque : $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f_n - f| \rightarrow 0$

$(f_n)_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f lorsque : $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b |f_n - f|^2\right)^{1/2} \rightarrow 0$

Ces notions sont distinctes : $CVU \Rightarrow CVMQ \Rightarrow CVM$ mais l'inverse est faux

Césaro : $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}, (\alpha_k)_k \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ tq $(\alpha_k)_k \rightarrow +\infty \Rightarrow (y_n)_n = \left(\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \right)_n$ converge vers l

VI. Extractions, valeurs d'adhérence

Un extraction est une application $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante

La composée de 2 extractions est une extraction. Si φ extraction, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$

A partie infinie de \mathbb{N} . Il existe φ extraction telle que $A = \varphi(\mathbb{N})$

Preuve : $\varphi(0) = \min A, \varphi(n) = \min(A \setminus \{\varphi(0) \dots \varphi(n-1)\})$ φ surj : absurde : $a \in A \setminus \varphi(\mathbb{N}) \Rightarrow a = \infty$

X un ensemble

$v \in X^{\mathbb{N}}$ est extraite de $u \in X^{\mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tq : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$

u non majorée $\Leftrightarrow \exists \varphi$ extraction tq $u_{\varphi(n)}$ strictement croissante $\rightarrow +\infty$

$u \not\rightarrow 0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \varphi$ extraction tq $\forall n, u_{\varphi(n)} \geq \varepsilon$

// HP // Procédé diagonal

(apcr = à partir d'un certain rang)

$(\varphi_k)_k$ famille d'extractions. $\exists \varphi$ extraction tq φ soit extraite apcr de TOUTES les extractions $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p$

i.e $\forall p \in \mathbb{N}, \exists N_p \in \mathbb{N}, \exists \psi_p$ extraction tq $\forall n \geq N_p, \varphi(n) = (\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p) \circ \psi_p(n)$

par exemple : $\varphi: n \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$

VII. Valeurs d'adhérence

$u \in E^{\mathbb{N}}, a \in A$. On a équivalence entre :

- $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N / \|u_n - a\| \leq \varepsilon$

- $\forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} / \|u_n - a\| \leq \varepsilon\}$ est infini

- $\exists \varphi$ extraction tq $(u_{\varphi(n)})_n$ converge en a

a est alors appelée valeur d'adhérence de u

Si $(u_n)_n$ converge vers l, l est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_n$

$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ possède au moins une sous-suite monotone

Preuve : $A = \{n \in \mathbb{N} / \forall k \geq n, u_k \leq u_n\}$ Si $\infty, A = \varphi(\mathbb{N})$ avec φ extraction. Si fini, A maj \Rightarrow constr par rec

Bolzano-Weierstrass : Toute suite réelle bornée possède au moins une valeur d'adhérence

Toute suite réelle possède une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Toute suite complexe bornée possède au moins une valeur d'adhérence. Idem pour \mathbb{R}^p

$(u_n)_n$ suite réelle bornée. $(u_n)_n$ converge $\Leftrightarrow (u_n)_n$ possède AU PLUS une valeur d'adhérence

Preuve : $\Leftarrow (u_n)$ non CV vers a unique v.a. $\Rightarrow (u_{\varphi(n)})$ tq $\forall n, \|u_{\varphi(n)} - a\| \geq \varepsilon \Rightarrow$ bornée+BW $\Rightarrow \exists$ v.a. $\neq a$

VIII. Suites de Cauchy

$(E, \|\cdot\|)$ evn. $u \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, (m \geq n_\varepsilon \text{ et } n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon)$

Toute suite convergente est de Cauchy. Toute suite de Cauchy est bornée.

$u \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. u convergente $\Leftrightarrow u$ possède au moins une valeur d'adhérence

L'evn $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy converge

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ sont complets

IX. Suites récurrentes réelles

$u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } f \nearrow, (u_n) \text{ est monotone} \\ \text{Si } f \searrow, f \circ f \nearrow \text{ et } (u_{2n}), (u_{2n+1}) \text{ sont monotones} \end{cases}$

$A \subset (E, \|\cdot\|)$ $f : A \rightarrow E$ est strictement contractante si : $\exists k \in]0, 1[$, $\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$

Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est strictement contractante, $\exists ! l \in [a, b]$ tq $f(l) = l$

De plus, toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^n$ telle que $\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est correctement définie et converge vers l

Preuve : $g = f - Id + TVI$. $|u_{n+1} - l| = \|f(u_n) - f(l)\| \leq k |u_n - l| \leq k^{n+1} |u_0 - l|$

I intervalle de \mathbb{R} . $f \in \mathcal{C}^1(I, I)$

// HP // Points attractifs, répulsifs

l point fixe de f . On dit que l est :

- attractif si $|f'(l)| < 1$
- neutre si $|f'(l)| = 1$
- répulsif si $|f'(l)| > 1$

\Rightarrow (i) Si l est attractif, $\exists \alpha > 0$ tq $J = [l - \alpha; l + \alpha] \cap I$ soit stable par f

Pour toute suite u telle que $u_0 \in J$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, u converge vers l

(ii) Si l est répulsif et si $u \in I^{\mathbb{N}}$ vérifie $(\forall n, u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } (u_n) \rightarrow l)$, la suite u est stationnaire

Preuve : i) k tq $|f'(l)| < k < 1, f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \exists J / \forall x \in J, |f(x) - f(l)| \underset{EAF}{=} |f'(c)| \underset{c \in J}{\|} \|x - l\| \leq k \alpha$

ii) ABS : $\forall n, u_n \neq l, \left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right| \rightarrow |f'(l)| \cdot k$ tq $|f'(l)| > k > 1$. Pour n grand : $\left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right| \geq k \Rightarrow |u_{n+p} - l| \rightarrow +\infty$

Techniques utiles :

Pour avoir un équivalent d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, chercher α tel que $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$ converge

Pour étudier une expression du type $|z^{n+1} - z^n|$, penser à diviser par $|z^n| \dots$