Chap 9 : Structures algébriques (I)

I. Groupes

Groupe $(G,*)$: $*$ associative, élément neutre e_g, tout élément de G admet un inverse

Sous groupe $(H,*) \Leftrightarrow \begin{cases} H \neq \varnothing \\ \forall (x,y) \in H^2, x*y \in H, \ \ x^{-1} \in H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \neq \varnothing \\ \forall (x,y) \in H^2, x*y^{-1} \in H \end{cases}$

Preuves : Composition par e_G, x^{-1}... dans H et dans G

E ensemble quelconque, $\mathbb{S}(E) = \{$bijections de E dans $E\}$ $(\mathbb{S}(E), \circ)$ est un groupe

Morphisme de groupe $\varphi : (G,*) \to (H,\square)$ (groupes) $\forall (x,y) \in G^2$, $\varphi(x*y) = \varphi(x)\square\varphi(y)$

$\varphi(e_G) = e_H$ $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

$\varphi(G_0)$ sous groupe de H $\varphi^{-1}(H_0)$ sous groupe de G

Si φ et ψ morphismes de groupes (de G dans H et de H dans K), $\psi \circ \varphi$ morph. gpe de G dans K

Noyau d'un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$: $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{e_H\})$ C'est un sous-groupe de G

φ injective *ssi* $\ker \varphi = \{e_G\}$

Isomorphisme : φ morph. gpe bijectif, φ^{-1} morph. de gpe (en réalité, la 1^e^ condition implique la 2^e^)

Automorphisme = isomorphisme de G dans G

$Aut(G,*) = Aut(G) = \{$automorphismes de groupe de G$\}$ $(Aut(G), \circ)$ est un groupe

$(G \times H, \cdot)$, $(x,y)\cdot(x',y') = (x*x', y\square y')$: groupe

$(H_i)_{i\in I}$ sous-groupes de $(G,*) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i$ sous groupe de G

$H_1 \cup H_2$ sous-groupe de G *ssi* $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$

Preuves : composer

II. Anneaux

Anneau $(A,+,\times)$: $(A,+)$ groupe commutatif, élément neutre 0_A,
$\times$ associative, distributive $/+$, $\times$ admet un élément neutre 1_A

B sous anneau *ssi* $\begin{cases} (B,+) \text{ sous groupe de } (A,+) \\ B \text{ stable par } \times \\ 1_A \in B \end{cases}$

φ morphisme d'anneau de $(A,+,\times)$ dans $(B,\oplus,\otimes)$:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$$
$$\varphi(x \times y) = \varphi(x) \otimes \varphi(y)$$
$$\varphi(1_A) = 1_B$$

$\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0_A\})$

$I \subset A$ idéal (bilatère) de A si : - $(I,+)$ sous groupe de $(A,+)$
- $\forall x \in I, \forall y \in A, \quad x \times y \in I \quad y \times x \in I$

φ morphisme d'anneaux $\Rightarrow \ker\varphi$ est un idéal de A
Si $1_A \in I$ ou I contient un élément inversible par $\times$, $I = A$
$\bigcap_{j\in J} I_j$ idéal de A $\quad I_1 + I_2 = \{x+y, x\in I_1, y\in I_2\}$ idéal de A

H sous-groupe de $\mathbb{Z} \Leftrightarrow H = a\mathbb{Z}$ $(a\in\mathbb{N})$ $\Leftrightarrow H$ idéal de $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \mathbb{Z}$ est un anneau principal

Preuve : comme H groupe, H admet une partie dans $\mathbb{N}^*$, on prend $a = \min(H \cap \mathbb{N}^*)$. Double inclusion :

récurrence (a$\mathbb{Z}$ contenu dans H), division euclidienne ➔ r<a (minimum) ➔ a$\mathbb{Z}$=H

A est intègre si : $xy = 0_A \Rightarrow (x = 0_A$ ou $y = 0_A)$
$A^* = \{x\in A, x$ inversible par $\times\}$ $\quad (A^*,\times)$ est un groupe $\quad \mathbb{Z}^* = \{-1;+1\}$

III. Corps

Corps $(\mathbb{K},+,\times)$: $(\sqsubset,+,\times)$ anneau, tout élément de $\mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\} = \mathbb{K}^*$ est inversible par $\times$

Sous corps K : $\begin{cases} (K,+) \text{ sous-groupe de } (\mathbb{K},+), \\ (K\setminus\{0_K\},\times) \text{ sous-groupe de } (\mathbb{K}^*,\times) \end{cases}$

φ morphisme de corps : idem morphisme d'anneau

Un corps est toujours intègre. $\quad$ Un idéal d'un corps est soit $\{0_{\mathbb{K}}\}$, soit $\mathbb{K}$

IV. Quelques résultats

$a\in A$ anneau. $\forall n\in\mathbb{N}$, on note $a^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n=0 \\ a\times a^{n-1} \text{ si } n\geq 1\end{cases}$ et $na = \begin{cases} 0 \text{ si } n=0 \\ a+(n-1)a \text{ si } n\geq 1\end{cases}$

$(x,y)\in A^2 \quad$ Si $xy = yx$, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, $x^k y = y x^k$

Binôme de Newton : $(A,+,\times)$ anneau, $(x,y)\in A^2$ tels que $xy = yx$, $\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Preuve : récurrence et triangle de Pascal

Formule de Bernouilli : $(A,+,\times)$ anneau, $(x,y)\in A^2$ tels que $xy = yx$, $\quad x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

Preuve : somme télescopique

Caractéristique d'un corps : $\theta \begin{cases} (\mathbb{Z},+_{\mathbb{Z}}) \to (\mathbb{K},+_{\mathbb{K}}) \\ n \mapsto n\cdot 1_{\mathbb{K}} \end{cases}$ morphisme de groupe $\Rightarrow \ker\theta$ ss-gpe de $\mathbb{Z}$

Si θ injectif, $\ker\theta = \{0_{\mathbb{Z}}\}$, on dit que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle
Sinon, $\ker\theta = \alpha\mathbb{Z}$, et $\mathbb{K}$ a pour caractéristique α

On n'écrit $\dfrac{1}{x}$ que pour un corps commutatif