Chap 8 : Entiers naturels et ensembles finis

I. $\mathbb{N}$

Existence d'un unique ensemble $\mathbb{N}$ tel que :

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

(ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément

(iii) $\mathbb{N}$ n'est pas majoré

Axiomes de Peano :

1) $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément 0

2) L'ordre est total

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!\, p \in \mathbb{N} \,/\, p = \min\{k \in \mathbb{N}, k > n\}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!\, p \in \mathbb{N} \,/\, n = s(p) \quad (p = a(n))$

5) $\forall E \subset \mathbb{N}, \begin{cases} 0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \in E \Rightarrow s(n) \in E \end{cases} \quad E = \mathbb{N}$

$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad (p \leq n) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}, n = p + k)$

LCI $+$ construite par récurrence, commutative, associative, élément neutre 0

LCI $\times$ construite par récurrence, commutative, associative, distributive $/ +$, élément neutre 1

$\mathbb{N}_n = [\![1, n]\!] = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\} \qquad [\![p, q]\!] = \{k \in \mathbb{N}, p \leq k \leq q\}$

II. Ensembles finis

E fini si $E = \varnothing$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E

Si $\exists \varphi : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ inj, $n \leq p$

Si $\exists \varphi : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ surj, $n \geq p$

Si $\exists \varphi : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ bij, $n = p$

Preuve : Récurrence, utiliser une bijection pour que f(p+1)=n, restreindre à [[1,p]] et se ramer au rang précédent. Se ramener à l'injectivité pour la surj grâce à l'inverse

E ens. fini. Si $E = \varnothing$, on pose $\operatorname{card} E = 0$ Sinon, $\exists! n \in \mathbb{N}^*$ tq $\exists \varphi \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}_n, E)$ bij : on définit $n = \operatorname{card}(E)$

$card(E \cup \{a\}) = card(E) + 1$ (si $a \notin E$)

E, F finis, $f \in \mathfrak{F}(E, F)$ $\quad \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F) \Rightarrow (f \text{ inj} \Leftrightarrow f \text{ surj} \Leftrightarrow f \text{ bij})$

Preuve : P. Abs. : g inj de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$, non surj $\Rightarrow$ inj. dans un ens. réduit : contradiction (Util. Comp°)

$F \in P(\mathbb{N}_n) \Rightarrow card(F) \leq n$ $\quad E$ ens. fini $\forall F \in P(E)$, F fini, et $\operatorname{card} F \leq \operatorname{card} E$, avec égalité *ssi* $F = E$

Une partie de $\mathbb{N}$ est finie *ssi* elle est majorée

$E \subset \mathbb{N}$ fini non vide, $\operatorname{card} E = n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans E

III. Opérations sur les cardinaux

$card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$

Crible de Poincaré : $card\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{j_1, j_2 \dots j_k\} \in P_k(\mathbb{N}_n)} card\left(\bigcap_{l=1}^{k} E_{j_l}\right)$

$card(E \times F) = card(E) \times card(F)$ $\qquad$ $card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \prod_{j=1}^{n} card(E_j)$

Preuve : passer par les singletons qui composent F

$card(\mathfrak{F}(E,F)) = card(F)^{card(E)}$

$\chi_A \begin{cases} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \, si \, x \notin A \\ 1 si \, x \in A \end{cases} \end{cases}$ $\qquad$ $card(A) = \sum_{x \in E} \chi_A(x)$

$card(P(E)) = 2^{card(E)}$

$P_k(E) = \{A \in P(E), card(A) = k\}$

$card(P_k(E)) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ $\qquad$ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Preuves : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} : Bijection \, A \to E \setminus A$

Triangle Pascal : ensembles à k éléments avec (n+1) (ensembles sans (n+1)$\cup\{n+1\}$),

ensembles sans (n+1) ($P_k(\mathbb{N}_n)$), union disjointe $\qquad$ $\binom{n}{k} = C_n^k$: *récurrence*, triangle Pascal

$card(\{f \in \mathfrak{F}(E,F) inj\}) = \frac{card(F)!}{(card(F) - card(E))!}$ $\qquad$ $card(\{f \in \mathfrak{F}(E,E) bij\}) = card(E)!$

Preuves : Récurrence sur n (card(F)) ou p (card(E))

Lemme des bergers : $\varphi \in \mathfrak{F}(E,F)$. Si $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $\forall y \in F, \mathrm{card}(\varphi^{-1}(\{y\})) = p \Rightarrow \mathrm{card}\, E = p \, \mathrm{card}\, F$

IV. $\mathbb{Z}$

$-\mathbb{N}^* = \{(-k), k \in \mathbb{N}^*\}$ $\quad$ $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cap (-\mathbb{N}^*)$: prolongement des lci et rel.d'ordres $\Rightarrow$ mêmes propriétés

inverse pour $+ \Rightarrow (\mathbb{Z}, +, \times)$ anneau commutatif

Valeur absolue $|k| = \max(k, -k)$ $\qquad$ $|n+p| \leq |n| + |p|$ $\qquad$ $|n| \leq q \Leftrightarrow -q \leq n \leq q$

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément

Preuve : se ramener à $\mathbb{N}$

Division euclidienne : $\forall (n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \begin{cases} n = qp + r \\ 0 \leq r \leq |p| \end{cases}$

Preuve : unicité : facile $\qquad$ Existence : passer par l'ensemble des k tels que pk<=n, majoré (ou minoré). On prend le minimum/maximum (q), r = n-pq, et comme (q-1) (ou q+1) n'est pas dans A, r<|p|