Chap 7 : Coniques

I. Coniques comme lieu de points

Conique de directrice D de foyer F et d'excentricité e :

$\mathcal{C} = \{M \in D,\ MF = e \times d(M,D)\}$

Si $e \in [0;1[$: Ellipse

Si $e = 1$: Parabole

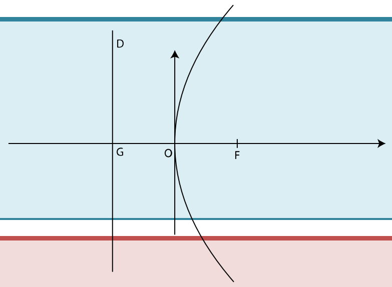
Si $e \in]1;+\infty[$: Hyperbole

G projeté orthogonal de F sur D $\qquad p = e \times d(F,D) = e \times FG$

1. Parabole (e=1)

Repère : $O = mil(F,G) \qquad \vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{FG}}{FG}$

$e = 1 \Rightarrow p = FG \qquad x = \dfrac{y^2}{2p}$



$Paramétrique : \boxed{\mathcal{P}\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}}$

2. Ellipse (e<1)

$\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{GF}}{GF} \qquad p = eFG \Leftrightarrow FG = \dfrac{p}{e}$

$\overrightarrow{OF} = c \times \vec{i} \qquad \boxed{c = \dfrac{e \times p}{1-e^2}}$ (pour l'annulation des termes en x par la suite)

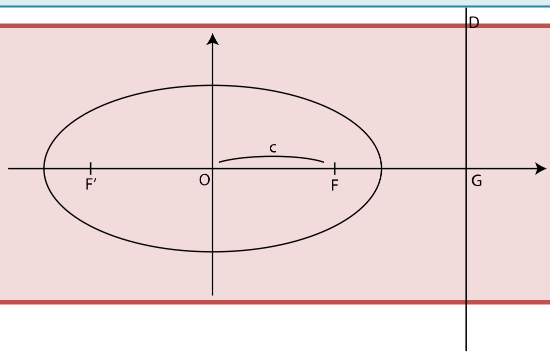
$D : x = c + FG = c + \dfrac{p}{e} \quad F(c,0)$

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}(1-e^2)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\boxed{a = \dfrac{c}{e} \qquad b = \dfrac{c}{e}\sqrt{1-e^2} \qquad c^2 = a^2 - b^2}$

$Paramétrique : \boxed{\mathcal{E}\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}}$

$\Rightarrow F'$ et D' symétriques de F et D par rapport à O



3. Hyperbole (e>1)

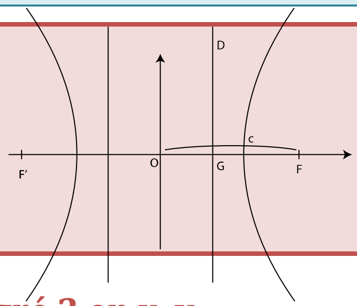
$\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{GF}}{GF} \qquad \boxed{c = \dfrac{p \times e}{e^2 - 1}}$

$D : x=\frac{c}{e^2}$ $\qquad F(c,0)$

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}}-\frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}(e^2-1)}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\boxed{a=\frac{c}{e} \qquad b=\frac{c}{e}\sqrt{e^2-1} \qquad c^2=a^2+b^2}$$

Paramétrique : $\boxed{\mathcal{H}\begin{cases}x(t)=\pm a\,\mathrm{ch}\,t\\ y(t)=b\,\mathrm{sh}\,t\end{cases}}$



II. Conique comme zéros d'un polynôme de degré 2 en x, y

$\mathcal{C} : ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad (E)$

Si on veut étudier en détail, on tourne le repère pour éliminer le terme en xy

$\left(\text{si } c=a, \text{ on prend } \theta=\frac{\pi}{4} \qquad \text{sinon on prend } \theta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{b}{a-c}\right)\right)$

$a'x'^2+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0 \qquad (E')$

On factorise selon les cas (signe de Δ), et on translate le repère pour récupérer des équations correctes

$\Delta_E=4ac-b^2=\Delta_{E'}=4a'c'-b'^2$

Si $\Delta_E=0$: Parabole $\quad c'\left(y'+\frac{e'}{2c'}\right)^2=-d'x'-f'+\frac{e'^2}{4c'} \quad\Rightarrow\quad Y^2=DX^2$

(dégénérée si $d'=0$: droites parallèles ou $\varnothing$)

Si $\Delta_E>0$: Ellipse $\quad a'(x'-x_0)^2+c'(y'-y_0)^2=\rho \quad\Rightarrow\quad \frac{X^2}{\sqrt{\frac{1}{a'}}^2}+\frac{Y^2}{\sqrt{\frac{1}{c'}}^2}=\rho$

(dégénérée si $\rho\leq 0$)

Si $\Delta_E<0$: Hyperbole $\quad a'(x'-x_0)^2-(-c')(y'-y_0)^2=\rho \quad\Rightarrow\quad \frac{X^2}{\sqrt{\frac{1}{a'}}^2}-\frac{Y^2}{\sqrt{\frac{1}{c'}}^2}=\rho$

(dégénérée si $\rho=0$)

III. Propriétés

1. Asymptotes de l'hyperbole

$\mathcal{H}\begin{cases}x(t)=\pm a\,\mathrm{ch}\,t\\ y(t)=b\,\mathrm{sh}\,t\end{cases}$ a pour asymptotes $y=\pm\frac{b}{a}x$

Preuve : utiliser la forme paramétrique

2. Définitions bifocales de l'ellipse et de l'hyperbole

$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P}, MF + MF' = 2a\}$

Preuve : utiliser la définition comme lieu de points. Puis partir de MF+MF', calculer MF²-MF'² pour en déduire MF-MF' et finalement MF=(a-ex)

$\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{P}, \ |MF - MF'| = 2a\}$

3. Tangentes

Ellipse : bissectrice extérieure des droites (MF) et (MF')

Preuve : utiliser la forme paramétrique, poser $f : t \mapsto FM(t) + F'M(t)$, introduire O (Chasles et le produit scalaire), en déduire que $\vec{T}(t) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{FM(t)}}{FM(t)} + \frac{\overrightarrow{F'M(t)}}{F'M(t)} \right) = 0$, c'est-à-dire que le vecteur tangent est perpendiculaire au vecteur directeur de la bissectrice intérieure

Hyperbole : bissectrice intérieure de (MF) et (MF')

Preuve : idem ellipse

Parabole : bissectrice extérieure de (MF) et (HM)

Preuve : mq $\overrightarrow{FH(t)} \cdot \overrightarrow{T(t)} = 0$ (car triangle HMF isocèle)

Equations cartésiennes :

Parabole : $2(y - y_0)y_0 - 2p(x - x_0) = 0$

Ellipse : $\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$

Hyperbole : $\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} - \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$

Preuves : Equation paramétriques et déterminant.

4. Equation polaire de la conique de foyer O

$M(\rho, \theta)$ $G(d, \varphi)$ proj. orth. de O sur D

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \varphi)}$$

Preuve : utiliser le projeté orthogonal M' de M sur (OG), ainsi MH=MG et $M'G = d - \rho\cos(\theta - \varphi)$

IV. Autres occurrences

1. Affinité orthogonale

$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2$ $\qquad \varphi \begin{cases} \mathcal{P} & \to \mathcal{P} \\ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto M'\begin{pmatrix} x \\ \alpha y \end{pmatrix} \end{cases}$ $\qquad \alpha > 0$

$\varphi(C) : \dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2 R^2} = 1$ (Utiliser φ^{-1})

$\varphi(C)$ est une ellipse, d'axe focal (Ox) si $\alpha < 1$, (Oy) sinon

On peut retrouver toutes les ellipses ansi (en choisissant $R = a$ et $\alpha = \dfrac{b}{a}$)

2. Apparition historique

Sections d'un cône

3. Ellipse comme projeté orthogonal d'un cercle

2 plans non parallèles ni perpendiculaires P et P_0

On prend un cercle C dans P

On prend un RON avec (Ox) intersection de P et P_0, et (Oy) dans P_0, de sorte que le centre de C ait x=0

$P_0 : z = 0$ $\qquad P : ay + bz = 0$ $\qquad$ On choisit $b = 1$

On exprime C : $\begin{cases} x^2 + (y - y_0)^2 + (z - ay_0)^2 = R^2 \\ z = ay \end{cases}$

Du coup, le projeté orthogonal de C : $x^2 + (1 + a^2)(y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{R^2} + \dfrac{Y^2}{\dfrac{R^2}{1 + a^2}} = 1$

V. Autres techniques

Directions asymptotiques : 2 pour l'hyperbole ($y = \pm bx / a$), 1 pour la parabole (Ox), aucune pour l'ellipse

Centre de symétrique : Uniquement pour l'ellipse et l'hyperbole

Preuve : exprimer l'équation dans le repère centré en O (centre de symétrie). Existe uniquement si coefs en X et Y nuls. On se ramène à deux équations de droites : solutions ssi déterminant non nul ssi pas parabole