Chap 5^3 : Géométrie élémentaire de l'espace

$\mathcal{E}$ espace affine de dimension 3, de direction $\vec{\mathcal{E}}$

I. Repères cartésiens

Base de $\vec{\mathcal{E}}$: donnée de 3 vecteurs $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ non coplanaires $\Rightarrow \forall \vec{u}\in\vec{\mathcal{E}}, \exists!(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Repère de $\mathcal{E}$: donnée d'un point O et d'une base de $\vec{\mathcal{E}}$ $\quad \Re=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

II. Produit scalaire

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ Bilinéaire, symétrique, défini positif Norme associée : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

Base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ orthogonale si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot\vec{w}=0$

Cauchy-Schwartz : $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \Rightarrow$ Inégalité triangulaire $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

Identité de polarisation : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Identité du parallélisme logique : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

III. Produit vectoriel

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}yz'-y'z\\ zx'-z'x\\ xy'-x'y\end{pmatrix}$$

Bilinéaire, antisymétrique, $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}=+\vec{e_3}$ BON directe, indirecte si $-$ $\quad (\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{u} \quad (\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{v}$

Preuve : Vrai pour $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\quad \|\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}\|^2=1 \quad (e_1\wedge e_2)\cdot e_1=(e_1\wedge e_2)\cdot e_2=0$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta\vec{n}$

IV. Déterminant (ou produit mixte)

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{u}=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=xy'z''+yz'x''+zx'y-x''y'z-y''z'x-z''x'y$$

(règle de Sarrus)

3-linéaire (à gauche, à droite, et au milieu), Alterné ($\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$ si 2 sont égaux), Antisymétrique

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0\Leftrightarrow\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ coplanaires

Développement par rapport à une colonne, un ligne... $\rightarrow$ signes alternés $\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$

$|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=6Vol(ABCD)$

V. Plans et droites

Caractérisation d'un plan :

Point et vecteur normal : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

Point et vecteurs directeurs : $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$ ou $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$

3 points : se ramener aux vecteurs

Equations paramétriques : $M\in\mathcal{P}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_A+s\alpha+t\alpha'\\y=y_A+s\beta+t\beta'\\z=z_A+s\gamma+s\gamma'\end{cases}$

Distance d'un point à un plan : $d(M_0,\mathcal{P})=\dfrac{|\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Caractérisation d'une droite :

Equations paramétriques : $\begin{cases}x=x_A+\alpha t\\y=y_A+\beta t\\z=z_A+\gamma t\end{cases}$

Equations cartésiennes : 2 équations de plans (non uniques)

Distance d'un point à une droite : $d(M_0,D)=\dfrac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM_0}\|}{\|\vec{u}\|}$

Perpendiculaire commune :

D et D' parallèles : même plan P, infinité de perpendiculaires communes

D et D' sécantes : même plan P → perpendiculaire commune : celle à P passant par le point d'intersection

D et D' non coplanaires → perpendiculaire coplanaire à $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{u}$ et à $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}$

Double produit vectoriel : $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$

VI. Sphères

$\mathbb{S}=\{M\in\mathcal{E},M\Omega=R\}=\{M\in\mathcal{E},\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\}$

Intersection entre $\mathbb{S}$ sphère de centre Ω et de rayon R avec $\mathcal{D}$ droite de $\mathcal{EM}$:

$d(\Omega,\mathcal{D})>R\Rightarrow\mathbb{S}\cap\mathcal{D}=\varnothing$

$d(\Omega,\mathcal{D})=R\Rightarrow\mathbb{S}\cap\mathcal{D}=\{H\}$ projeté orth. de Ω sur $\mathcal{D}$

$d(\Omega,\mathcal{D})<R\Rightarrow\mathbb{S}\cap\mathcal{D}=\{A,B\}$ $(A\neq B)$

Intersection entre $\mathbb{S}$ et $\mathcal{P}$ plan de l'espace : ($d(\Omega,\mathcal{P})\leq R$ idem droite)

$d(\Omega,\mathcal{P})<R\Rightarrow\mathbb{S}\cap\mathcal{P}$ est un cercle de centre H de rayon $\sqrt{R^2-d(\Omega,\mathcal{P})^2}$ contenu dans $\mathcal{P}$

Intersection entre $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$ sphères de centre Ω_1 et Ω_2, de rayon R_1 et R_2 :

$\Omega_1\Omega_2>R_1+R_2$ ou $\Omega_1\Omega_2<|R_1-R_2|\Rightarrow\mathbb{S}_1\cap\mathbb{S}_2=\varnothing$

$\Omega_1\Omega_2=R_1+R_2$ ou $\Omega_1\Omega_2=|R_1-R_2|\Rightarrow$ Les deux sphères sont tangentes

$R_1+R_2>\Omega_1\Omega_2>|R_1-R_2|\Rightarrow\mathbb{S}_1\cap\mathbb{S}_2$ est un cercle