Chap 5² : Géométrie élémentaire du plan

$\mathcal{P}$ plan affine de direction $\vec{\mathcal{P}}$

I. Repères

Base de $\vec{\mathcal{P}}$: 2 vecteurs non colinéaires

Repère de $\mathcal{P}$: point de $\mathcal{P}$ + base de $\vec{\mathcal{P}}$ → coordonnées

$\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}), \mathcal{R} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\begin{cases} \vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \\ \vec{v} = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j} \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\Omega + (\alpha x + \gamma y) \\ y_\Omega + (\beta x + \delta y) \end{pmatrix}$

II. Produit scalaire

$\mathcal{P}$ plan affine de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère $\vec{\mathcal{P}}$ muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$, en bijection avec $\mathbb{R}^2$

Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$: $\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

* Bilinéaire : $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{w} + \beta\vec{v} \cdot \vec{w}$ $\quad \vec{w} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{w} \cdot \vec{u} + \beta\vec{w} \cdot \vec{v}$

* Symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

* Défini positif : $\forall \vec{u}, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \qquad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Norme associée : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ $\quad \Rightarrow$ Inégalité triangulaire : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Preuve : 1. $(\vec{u} + \lambda\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \lambda\vec{v}) \geq 0 \quad \Rightarrow \Delta \leq 0$ $\qquad$ 2. Utiliser le carré

Produit scalaire sur $\vec{\mathcal{P}}$ de base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\forall \begin{cases} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{cases}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ $\qquad$ Mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}^2$

$\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. $\qquad (\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthogonale si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

$(\vec{u}, \vec{v})$ base orthonormée si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

On a la même expression $xx' + yy'$ du produit scalaire en cas de changement de base ORTHONORMEE

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ $\qquad a = aff(\vec{u}) \in \mathbb{C}, b = aff(\vec{v}) \in \mathbb{C}$ $\qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{Re}(a\bar{b})$

Preuve : poser une BON tq $\vec{u} = \|\vec{u}\| \vec{e_1}$, exprimer $\vec{v}$ et le produit scalaire

III. Déterminant

Le déterminant dans $\mathbb{R}^2$: $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ $\qquad$ Bilinéaire, antisymétrique $(\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}; \vec{u}))$

On définit le déterminant sur $\vec{\mathcal{P}}$ via les coordonnées

(et l'expression $xy' - x'y$ est valable quelle que soit la BON considérée)

$\det(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Rightarrow (\vec{u},\vec{v})$ base de $\mathcal{P}$ *ssi* $\det(\vec{u},\vec{v})\neq 0$

$(\vec{u},\vec{v})$ base directe si $\det(\vec{u},\vec{v})>0$, indirecte si $\det(\vec{u},\vec{v})<0$

$\det(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$ (angle orienté) $Aire(ABC)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|$

$a=aff(\vec{u}), b=aff(\vec{v}) \Rightarrow \det(\vec{u},\vec{v})=\mathrm{Im}(\bar{a}b)$ $\vec{u},\vec{v}$ colinéaires *ssi* $\bar{a}b\in\mathbb{R}$

IV. Droites

Caractérisation d'une droite : – $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{D}$, $A\in\mathcal{D}$ $M\in\mathcal{D}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

– $\vec{u}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$, $A\in\mathcal{D}$ $M\in\mathcal{D}\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$

$d(M_0,\mathcal{D})=M_0H=\dfrac{|\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(A\in\mathcal{D}, \vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right.$ normal à $\mathcal{D}$, $ax+by+c=0$ eq. cartés. de $\mathcal{D}$)

Preuves : d(M_0,D)=M_0H : développer MM_0^2 (par rapport à H) et déduire le cas d'égalité

Exprimer $\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{n}$ en fonction de H ➔ résultat Ou : l'exprimer d'après l'équation

V. Cercles

$\mathcal{C}=\{M\in\mathcal{P}, M\Omega=R\}=\{M\in\mathcal{P}, \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\}$ où $[AB]$ diamètre de $\mathcal{C}$, et Ω centre de $\mathcal{C}$

Preuve : Développer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ par rapport à Ω

Intersection avec une droite :

$d(\Omega,D)>R:\varnothing$ $d(\Omega,D)=R:\{H\}$ (proj orth de Ω sur D) $d(\Omega,D)<R:\{A,B\}$

Intersection de 2 cercles : $\Omega_1\Omega_2<|R_1-R_2|$ ou $\Omega_1\Omega_2>R_1+R_2$: $\varnothing$

$\Omega_1\Omega_2=|R_1-R_2|\neq 0$ ou $\Omega_1\Omega_2=R_1+R_2$: $\{H\}$ (les deux cercles sont tangents)

$|R_1-R_2|<\Omega_1\Omega_2<R_1+R_2$: $\{A,B\}$

Preuve analytique : Développer les équations, en déduire une droite, faire selon la distance à cette droite.

VI. Quelques lignes de niveau

$\vec{u}, A$ fixés $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=\alpha\Leftrightarrow M\in\mathcal{D}$, droite de vecteur normal $\vec{u}$ passant B tel que $\overrightarrow{AB}=\alpha/\|\vec{u}\|^2\,\vec{u}$

$\det(\vec{u},\overrightarrow{AM})=\alpha\Leftrightarrow M\in\mathcal{D}$, droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant B tel que $\overrightarrow{AB}=\alpha/\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\,\vec{v}$ avec $\vec{v}\perp\vec{u}$

VII. Coordonnées polaires

Coord. polaires de $M:(r,\theta)$ où $\begin{cases}r=OM\\ \theta\equiv(\vec{i},\overrightarrow{OM})[2\pi]\end{cases}$ Base polaire : $(\vec{u_\theta},\vec{v_\theta})$ BON $\vec{u_\theta}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \vec{v_\theta}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

Droite passant par O : $M(r,\theta)\in D\Leftrightarrow\theta=\theta_0$

Droite ne passant pas par O : $H(d,\alpha)$ projeté orthogonal de O sur D. $M(r,\theta)\in D\Leftrightarrow r\cos(\theta-\alpha)=d$

Preuve : Prod scal OH, HM nul → Pythagore → Développer HM p/r O …

Cercle **passant** par O : $M(r,\theta)\in C(\Omega(R,\alpha),R)\Leftrightarrow r=2R\cos(\theta-\alpha)$