Chap 4 : Equations différentielles linéaires

I. Quelques caractérisations de l'exponentielle

$$\{f \in \mathfrak{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f' = f\} = \left\{ f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto ae^t \end{cases} \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\{f \in \mathfrak{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(x+y) = f(x) \times f(y)\} = \left\{ 0_{F(\mathbb{R},\mathbb{R})},\ f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\beta t} \end{cases} \quad \beta = f'(0) \right\}$$

Preuves : 1 : vérifier puis unicité avec produit des deux → dérivée
2 : Vérifier pour 0, dériver f(x+y) p/r y, utiliser le truc précédent

II. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

$(E) \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ $\rightarrow$ Espace des solutions : $\mathbb{S}$

$(E_0) \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0$ $\rightarrow$ Espace des solutions : $\mathbb{S}_0$

$\mathbb{S}_0$ espace des solutions est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel

Preuve : $\mathbb{S}_0 \neq \varnothing$ car $0_{F(I,\mathbb{R})} \in \mathbb{S}_0$ $\quad (\alpha f + \beta g)'(x) + (\alpha f + \beta g)(x) = 0$

y_1 solution de (E) $\quad y \in \mathbb{S} \Leftrightarrow (y - y_1) \in \mathbb{S}_0$ $\quad \mathbb{S} = y_1 + \mathbb{S}_0$

$\mathbb{S}$ est un sous espace affine de $\mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$

Preuve : égaliser (E) pour y et y_1, et se ramener à E_0

$$\mathbb{S}_0 = \left\{ y \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$ où A est une primitive de a sur I

Preuve : Vérifier $e^{-A(x)}$ solution. S_0 sous-esp vect → $\lambda e^{-A(x)}$ solution. Vérifier $e^{A(x)}y(x)$ constant.

Méthode de variation de la constante :

Chercher $y : x \mapsto \mu(x)e^{-A(x)} \Rightarrow \mu'(x) = e^{A(x)}b(x)$

$$\mathbb{S} = \left\{ \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu_1(x)e^{-A(x)} + \lambda e^{-A(x)} \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\left(\lambda + \int_{x_1}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} b(s)ds\right) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$(E) \quad y' + ay = b_1 + b_2$ $\quad \rightarrow \forall j \in \{1,2\}, (E_j) \quad y_j' + ay_j = b_j$ $\quad (E) = (E_1) + (E_2)$

y_1 solution de (E_1), y_2 solution de $(E_2) \Rightarrow$ $(y_1 + y_2)$ solution de (E)

Théorème de Cauchy-Lipschitz : $\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = z_0 \end{cases}$ admet une unique solution $\left(y = \dfrac{z_0 - y_1(x_0)}{y_0(x_0)} y_0 + y_1 \right)$

Preuve : $y_0 : x \mapsto e^{-A(x)}, y_1$ solution particulière, $\mathbb{S} = \{\lambda y_0 + y_1\}$ Remplacer et trouver un unique λ_1

III. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 (à coefficients constants)

$(E) \quad y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$

$(E_0) \quad y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$

$\mathbb{S}_0$ est un espace vectoriel

y_1 solution de (E) $\quad y\in\mathbb{S} \Leftrightarrow (y-y_1)\in\mathbb{S}_0 \qquad \mathbb{S}=y_1+\mathbb{S}_0$

$\mathbb{S}$ est un sous espace affine de $F(I,\mathbb{R})$

$(E_0) \quad y''+ay'+by=0 \qquad (a,b)\in\mathbb{C}^2$

$(E_r) \quad x^2+ax+b=0$

$*\Delta\neq 0$ solutions de $(E_r):\alpha\neq\beta$

$$\mathbb{S}_0=\left\{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ x\mapsto \lambda e^{\alpha x}+\mu e^{\beta x}\end{cases} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$$

$*\Delta=0$ solution de $(E_r):\alpha$

$$\mathbb{S}_0=\left\{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ x\mapsto (\lambda x+\mu)e^{\alpha x}\end{cases} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$$

Preuve : Chercher une solution de la forme $y:x\mapsto e^{rx} \qquad y\in\mathbb{S}_0 \Leftrightarrow r^2+ar+b=0$

$*\Delta\neq 0 \Rightarrow \{\lambda e^{\alpha x}+\mu e^{\beta x}\}\subset\mathbb{S}_0 \qquad$ (S_0 sous esp vect)

$g:x\mapsto e^{-\alpha x}y(x) \qquad y\in\mathbb{S}_0 \Leftrightarrow y(x)=e^{\alpha x}g(x)$

$\Rightarrow g'$ solution de $z'+(2\alpha+a)z=0 \Leftrightarrow z'+(\alpha-\beta)z=0 \qquad a=-(\alpha+\beta)$

$\exists\lambda_0\in\mathbb{C}$ tq $g'(x)=\lambda_0 e^{(\alpha-\beta)x} \quad \Rightarrow g(x)=\dfrac{\lambda_0}{\beta-\alpha}e^{(\beta-\alpha)x}+\mu \quad \Rightarrow \ldots$

$*\Delta=0$ *idem* $\quad 2\alpha+a=0\Rightarrow g''(x)=0\Rightarrow g(x)=\lambda x+\mu\Rightarrow\ldots$

$(E_0) \quad y''+ay'+by=0 \qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

$(E_r) \quad x^2+ax+b=0$

$*\Delta>0$ solutions réelles : $r_1\neq r_2$

$$\mathbb{S}_0=\left\{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \lambda e^{r_1 x}+\mu e^{r_2 x}\end{cases} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

$*\Delta=0$ solution : r_0

$$\mathbb{S}_0=\left\{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto (\lambda x+\mu)e^{r_0 x}\end{cases} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

$*\Delta<0$ solutions complexes : $r_1=\overline{r_2}=\alpha+i\beta$

$$\mathbb{S}_0=\left\{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x)+\mu\sin(\beta x))=Ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi)\end{cases} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Preuve : $\Delta<0$ Partir du résultat complexe, passer aux conjugués, puis vérifier la "réciproque"

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : $\forall(x_0,P_0,Q_0)\in I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, il existe une unique solution de (E)

$y\in\mathfrak{D}^2(I,\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases}y(x_0)=P_0\\ y'(x_0)=Q_0\end{cases}$