Chap 30 : Propriétés métriques des courbes

Voir le chapitre « Arcs Paramétrés »

I. Paramétrage admissible / abscisse curviligne

$\gamma \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^2)$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, de support $\Gamma = \{M(t), t\in I\}$

Un point $M(t_0)$ est dit régulier si $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \neq 0$, $\vec{T}(t_0) = \frac{1}{\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\right\|}\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ est son vecteur unitaire tangent

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^k(J,I)$ $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme (J int. de $\mathbb{R}$) (éventuellement φ croissant pour conserver l'orientation)

$g = \gamma\circ\varphi \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R}^2)$ est un changement de paramétrage admissible de l'arc γ

Le caractère régulier d'un point est invariant par changement de paramétrage admissible

Une abscisse curviligne s de l'arc $\gamma \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^2)$ est une primitive de l'application $\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \|\gamma'(t)\| = \left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)\right\| \end{cases}$

Si γ est $\mathcal{C}^k$ régulier, alors son abscisse curviligne $s \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$

L'abscisse curviligne s de l'arc γ est un $\mathcal{C}^k$ – difféo. de I sur $J = s(I)$, elle définit un param. admissible de l'arc

h le paramétrage de γ par l'abscisse curviligne. $\forall s_0 \in J, \|h'(s_0)\| = 1$

Coord. cartésiennes : $s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ Coordonnées polaires : $s'(\theta) = \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}$

Si s abscisse curv. de γ, $g = \gamma\circ\varphi$ param. admissible de γ a pour absc. curv. $\tilde{s}(u) = \pm s(\varphi(u)) + k$

On définit la longueur de l'arc $\gamma \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^2)$ entre $M(t_1)$ et $M(t_2)$, indépendante du param. admissible choisi :

$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} ds = s(t_2) - s(t_1)$ où s est une abscisse curviligne de l'arc

Le paramétrage g est normal si la courbe est paramétrée par son abscisse curviligne : $g = \gamma \circ s^{-1}$

II. Points biréguliers / théorème de relèvement / courbure

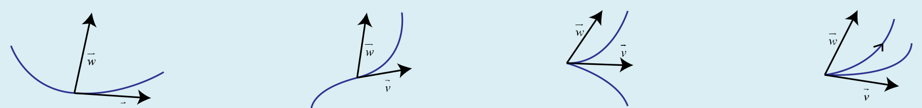
$k \geq 2$

$\gamma \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^2), t_0 \in I$ $M(t_0)$ est un point birégulier si $(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$ est une famille libre

Plus généralement : $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* / \gamma^{(k)}(t_0) \neq 0\}$, $q = \min\{k > p / (\gamma^{(k)}(t_0), \gamma^{(p)}(t_0))$ libre$\}$

$\vec{v} = \gamma^{(p)}(t_0), \vec{w} = \gamma^{(q)}(t_0)$ Dans la base $(\vec{v},\vec{w})$, $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \left(\frac{h^p}{p!} + h^p\varepsilon_1(h)\right)\vec{v} + \left(\frac{h^q}{q!} + h^q\varepsilon_2(h)\right)\vec{w}$

p impair, q pair — p,q impairs — p pair, q impair — p,q pairs



Point d'inflexion — Point de rebroussement 1er type — Point de rebroussement 2e type

$\gamma \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^2)$ arc régulier. $\forall M(t_0)$, le repère de Frénet (RON) $\begin{cases} \vec{T}(t_0) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \times \dfrac{1}{s'(t_0)} \\ \vec{N}(t_0) = \overrightarrow{r_{\pi/2}}(\vec{T}) \end{cases}$

Thm de relèvement : $\varphi \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{C})$ tq $\forall t \in I, |\varphi(t)|=1$. $\exists \alpha \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ tq $\forall t \in I, \underline{\varphi(t) = e^{i\alpha(t)}}$(unique $\bmod 2k\pi$)

Preuve : $\varphi'(t) = i\alpha'(t)e^{i\alpha(t)} \Rightarrow \alpha' = -i\dfrac{\varphi'}{\varphi}.|\varphi(t)|^2 = 1 \Rightarrow \varphi'\overline{\varphi} + \varphi\overline{\varphi'} = 0 \Rightarrow \alpha(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t}\dfrac{\varphi'}{\varphi} \in \mathbb{R}$

Coord. cartésiennes $\cos(\alpha(t)) = \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}$ et $\sin(\alpha(t)) = \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \Rightarrow \tan(\alpha(t)) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

Coord. polaires : $V = (\vec{u_\theta}, \vec{T})$ $\quad \alpha = \theta + V \Rightarrow \begin{cases} \cos(V(\theta)) = \dfrac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}} \\ \sin(V(\theta)) = \dfrac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}} \end{cases} \Rightarrow \tan(V(\theta)) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$

Courbure de $\gamma \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^2)$, arc régulier, au point $M(t)$: $c(t) = \dfrac{d\alpha}{ds}(t) = \dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{d\alpha}{dt}(t)$

Pour le calcul : soit on a déjà α, soit on utilise :

- En coord. cartésiennes : $\alpha' = \dfrac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2} \Rightarrow c = \dfrac{\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)}{(s')^3}$

- En polaires : $V'(\theta) = \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}(\theta)$ $\quad c(\theta) = \dfrac{\rho^2 + 2\rho' - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$

L'angle α d'une courbe $\gamma \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^2)$ birégulière définit un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^{k-1}$

$\dfrac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$ $\qquad \dfrac{d\vec{N}}{d\alpha} = \vec{T}$ $\qquad \Rightarrow \dfrac{d\vec{T}}{ds} = c\vec{N}$ $\qquad \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -c\vec{T}$

On définit le rayon de courbure de $\gamma \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^2)$ birégulier : $R = \dfrac{1}{c}$

Formules de Frénet : $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\vec{N}, \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\dfrac{1}{R}\vec{T}$ $\qquad \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \vec{T}, \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$

$\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t) = s''(t)\vec{T}(t) + s'^2(t)c(t)\vec{N}(t)$ $\qquad \det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t), \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)\right) = s'^3(t)c(t)$

Le centre de courbure de $\gamma \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^2)$ birégulier en $M(t_0)$ est $C(t_0) = M(t_0) + R(t_0)\vec{N}(t_0)$

La courbe parcourue par $(C(t))_{t\in I}$ est appelée développée de la courbe γ

III. Intégrale d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un champ de vecteur sur Ω est une application $\vec{X}\begin{cases} \Omega \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \vec{X}(x) \end{cases}$ (de classe $\mathcal{C}^k$ si $\vec{X} \in \mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$)

Exemple fondamental : $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$. $\overrightarrow{grad} f$ est un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur Ω

$k \geq 1$

$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ champ de vecteur. Si $\overrightarrow{X}$ dérive d'un potentiel, alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^{\ 2}, \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$

/HP/ Thm de Poincaré : Si Ω est un ouvert étoilé ($\exists a \in \Omega, \forall x \in \Omega, [a,x] \in \Omega$), alors la réciproque est vraie

$\overrightarrow{X} \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n). \gamma \in \mathcal{C}^1([a,b], \Omega)$ L'intégrale du champ $\overrightarrow{X}$ le long de γ : $\int_\gamma \overrightarrow{X} = \int_a^b \langle \overrightarrow{X}(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \rangle dt$

Pour une courbe fermée, on note $\oint_\gamma \overrightarrow{X}$ circulation du champ de vecteurs

$\overrightarrow{X} \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dérivant d'un potentiel $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{R}). \forall \gamma \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}), \int_\gamma \overrightarrow{X} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Cela dépend uniquement des extrémités, pas du chemin

La circulation le long d'un chemin fermé d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel est nulle

$\varphi \in \mathcal{C}^1([c,d],[a,b])$ changement de paramétrage croissant de γ. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Circulation de $\overrightarrow{X}$ le longe de γ : $\int_c^d \langle \overrightarrow{X}(\gamma(\varphi(t))) \mid \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) dt = \int_a^b \langle \overrightarrow{X}(\gamma(u)) \mid \gamma'(u) \rangle du$

$\Rightarrow$ La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée ne dépend pas du paramétrage

IV. Intégrales multiples

$A \subset \mathbb{R}^2$ est de mesure nulle si : $\forall \varepsilon > 0, \exists (R_j)_{j \in 1,n}$ rectanges tq $A \subset \bigcup_{j=1}^n R_j$ et $\sum_{j=1}^n Aire(R_j) < \varepsilon$

$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) dxdy$ est le volume algébrique entre $z = f(x,y)$ et le rectangle $[a,b]\times[c,d]$

$f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}), \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ $[a,b]\times[c,d] \subset \Omega \Rightarrow \begin{cases} x \mapsto \int_c^d f(x,y)dy \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \\ y \mapsto \int_a^b f(x,y)dx \in \mathcal{C}^0([c,d], \mathbb{R}) \end{cases}$

et $\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$