Chap 3 : Fonctions usuelles

I. Fonctions réciproques

Les fonctions réciproques conservent la croissance et la continuité.

Si f ne s'annule pas sur l'intervalle considéré, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

II. Fonctions circulaires réciproques

$$\arcsin \begin{cases} [-1;1] & \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto \left(\sin_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(x) \end{cases} \qquad \arccos \begin{cases} [-1;1] & \to [0,\pi] \\ x & \mapsto (\cos_{[0,\pi]})^{-1}(x) \end{cases} \qquad \arctan \begin{cases} \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x \mapsto \left(\tan_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on n'a pas nécessairement $\underbrace{\arcsin(\sin x)}_{\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} = \underbrace{x}_{\in\mathbb{R}}$, et de même pour $\cos$ $\qquad \tan \circ \arctan = Id_{\mathbb{R}}$

$\arcsin$ et $\arctan$ sont impaires, $\arccos$ n'a pas de parité

III. Rappels sur exp et ln

$\exp$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\ln$ est la fonction réciproque de $\exp$. Elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, et est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) \qquad f_a \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x^\alpha \end{cases}$

- Si $\alpha = 0$, f_a est constante égale à 1
- Si $\alpha > 0$, f_a est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ (décroissante si $\alpha < 0$)

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, g_a \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \end{cases}$

- Si $a > 1, g_\alpha$ est strictement croissante — Si $a < 1, g_\alpha$ est strictement décroissante

$\forall x \in \mathbb{R}, f_\alpha{}'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad g_a{}'(x) = \ln(a) a^x$

$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \quad\Rightarrow\begin{cases}\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^{*\,2},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty, \qquad \lim_{x\to0^+}x^\alpha\,|\ln x|^\beta=0^+\\ \forall a>1,\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\beta}=+\infty\end{cases}$$

Preuve : Lemme $\Rightarrow$ intégrales $\frac{1}{t}\le\frac{1}{\sqrt{t}}$... Cor 1 : $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\ln X}{X}\right)^a$, $\lim_{x\to+\infty}X=+\infty$

IV. Fonctions hyperboliques

Cosinus sinus et tangente hyperboliques : $\mathrm{ch}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{e^x+e^{-x}}{2}\end{cases}$ $\quad\mathrm{sh}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{e^x-e^{-x}}{2}\end{cases}$ $\quad\mathrm{th}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\end{cases}$

(ch et sh sont les parties paire et impaire de l'exponentielle réelle) th est impaire

$\mathrm{ch}'=\mathrm{sh}$ $\qquad \mathrm{sh}'=\mathrm{ch}$ $\qquad \mathrm{th}'=1-\mathrm{th}^2=\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$

$\forall x\in\mathbb{R},\mathrm{ch}(x)>|\mathrm{sh}(x)|$ $\qquad \mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1$

$\mathrm{ch}(a+b)=\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$ $\qquad \mathrm{sh}(a+b)=\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$

On définit leurs fonctions réciproques :

$\arg\mathrm{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (impaire) $\qquad \arg\mathrm{ch}:[1,+\infty[\to\mathbb{R}_+$ $\qquad \arg\mathrm{th}:]-1;1[\to\mathbb{R}$ (impaire)

$\arg\mathrm{sh}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \arg\mathrm{ch}'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad \arg\mathrm{th}'(x)=\frac{1}{1-x^2}$

Expressions explicites : $\arg\mathrm{sh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $\qquad \arg\mathrm{ch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $\qquad \arg\mathrm{th}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

V. Exponentielle complexe

$\exp\begin{cases}\mathbb{C}&\to\mathbb{C}^*\\ z=x+iy&\mapsto e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)\end{cases}$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ surjectif

$a\in\mathbb{C},\varphi\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto\exp(at)\end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall t\in\mathbb{R},\varphi'(t)=a\exp(at)$

$z=x+iy\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ $\qquad \theta=\arg(z)=2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$