

# Chap 29 : Géométrie affine

## I. Sous-espace affine d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev

La translation de vecteur  $a \in E$  est :  $\tau_a \begin{cases} E \rightarrow E \\ v \mapsto v + a \end{cases}$

$\begin{cases} (E, +) \rightarrow (\mathcal{S}(E), \circ) \\ a \mapsto \tau_a \end{cases}$  est un morphisme de groupe  $\Rightarrow \mathcal{F}(E) = \{\text{translations}\}$  est un groupe commutatif

$\mathcal{F} \subset E$  est un sous-espace affine de  $E$  s'il est l'image par une translation d'un sev  $F$  de  $E$  :  $\mathcal{F} = \tau_a(F)$  ( $a \in E$ )

Tout sev est un sea  $E$  est un sea de  $E$  : On note  $\mathcal{E}$  le sea  $E$  de  $E$

Les éléments de  $\mathcal{E}$  sont appelés points de l'espace affine  $\mathcal{E}$

On dispose d'une bijection  $\begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow E \\ M \mapsto \overline{OM} \end{cases}$  où  $O$  est le point de  $\mathcal{E}$  associé à  $0_E$

Définition d'un espace affine : ensemble de points  $\mathcal{E}$  tel qu'il existe un ev  $E$  (la direction de  $\mathcal{E}$ ) :

$\forall A \in \mathcal{E}, \varphi_A \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow E \\ B \mapsto \varphi_A(B) = \overline{AB} \end{cases}$  remplit ces conditions :  $\begin{cases} \forall A, B \in \mathcal{E}^2, \varphi_A(B) = 0_E \Leftrightarrow A = B \\ \forall A, B, C \in \mathcal{E}^3, \varphi_A(C) = \varphi_A(B) + \varphi_B(C) \end{cases}$   
 $\forall A \in \mathcal{E}, \varphi_A$  est donc une bijection qui permet d'identifier  $\mathcal{E}$  à  $E$  (on se fixe  $A$  comme origine)

$A \in \mathcal{E}$  fixé, associé à  $a \in E$ .  $\forall B \in \mathcal{E}$  associé à  $b \in E$ , il existe un unique vecteur  $\vec{v} = b - a = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3 \quad \overline{AB} = 0_E \Leftrightarrow A = B \quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$\begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow E \\ B \mapsto \overline{AB} \end{cases}$  est une bijection d'inverse  $\begin{cases} E \rightarrow \mathcal{E} \\ v \mapsto \text{l'unique } B \text{ tq } \overline{AB} = v \end{cases}$  : on note  $B = A + \vec{v}, \vec{u} = B - A$

Si  $A$  est le point de  $\mathcal{E}$  associé à  $a \in E$ , on peut noter  $\mathcal{F} = \tau_a(F) = A + F$  où  $F$  sev de  $E$

On n'a pas de loi  $+/-$  sur  $\mathcal{E}$ , ce ne sont que des notations

$\mathcal{F}$  sea de  $E$ . Il existe un unique sev  $F$  de  $E$  tel que  $\mathcal{F} = \tau_a(F)$ , où  $a \in E$ . Ce sev  $F$  est appelé direction de  $\mathcal{F}$

**Preuve :**  $\mathcal{F} = \tau_a(F) = \tau_c(G)$ .  $B \in \mathcal{F}$ . Mq  $F = \{\overline{AB} / B \in \mathcal{F}\}, G = \{\overline{CB} / \vec{u} \in F : \vec{u} = \overline{AB} = \underbrace{\overline{AC}}_{=-\overline{CA} \in G} + \underbrace{\overline{CB}}_{\in G} \in G$

$\mathcal{F} = A + F, \mathcal{G} = B + G$  deux sea de  $\mathcal{E}$ .  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est  $\begin{cases} \text{soit vide} \\ \text{soit un sea de direction } F \cap G \end{cases}$

**Preuve :**  $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \Rightarrow (M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \Leftrightarrow \overline{CM} \in F \text{ et } \overline{CM} \in G \Leftrightarrow \overline{CM} \in F \cap G \Leftrightarrow M \in C + (F \cap G))$

$E$  ev de dim finie.  $\forall \mathcal{F}$  sea de  $E$ , on définit la dimension de  $\mathcal{F}$  comme étant la dimension de sa direction

## II. Applications affines

$\mathcal{E}$  sera un espace affine associé à un  $\mathbb{R}$ -ev  $E$

$\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  e.aff. de directions  $E$  et  $F$ .  $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  est une application affine s'il existe  $A \in \mathcal{E}$  et  $\vec{f} \in \mathfrak{L}(E, F)$  tq :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}), \text{ c'est à dire } f(M) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$$

On a alors, pour tout  $b \in \mathcal{E}, \forall M \in \mathcal{E}, f(M) = f(B) + \vec{f}(\overrightarrow{BM})$   $\vec{f}$  est appelée partie linéaire de  $f$

**Preuve :**  $\overrightarrow{f(B)f(M)} = \overrightarrow{f(B)f(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \vec{f}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}) = \vec{f}(\overrightarrow{BM})$

$f$  et  $g$  applications affines de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{F}$  et de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{G} \Rightarrow g \circ f$  est une app. affine de partie linéaire  $\vec{g} \circ \vec{f}$

$Aff(\mathcal{E}) = \{f \in \mathfrak{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \text{ application affine}\}$

$f \in Aff(\mathcal{E}), A_0 \in E. \exists!(\vec{u} \in E, g \in Aff(\mathcal{E}))$  tq  $g(A_0) = A_0$  et  $f = \tau_{\vec{u}} \circ g$

$f \in Aff(\mathcal{E}), \Omega = \{\text{points fixes de } f\}$ . On a : soit  $\Omega = \emptyset$ , soit  $\Omega$  est un sea de direction  $\ker(\vec{f} - Id_E)$

$f \in Aff(\mathcal{E})$  et  $(\vec{f} - Id_E) \in Gl(E) \Rightarrow f$  a un unique point fixe  $M$  dans  $\mathcal{E}$  ( $M = B + (\vec{f} - Id_E)^{-1}(\overrightarrow{f(B)B})$ )

$f \in Aff(\mathcal{E})$  est une translation ssi  $\vec{f} = Id_E$

$f \in Aff(\mathcal{E})$  est une homothétie de rapport  $\lambda$  ssi  $\vec{f} = \lambda Id_E$

{homothéties de  $\mathcal{E}$  (de rapport non nul)}  $\cup$  {translations de  $\mathcal{E}$ } forme un groupe (pour  $\circ$ )

$f \in Aff(\mathcal{E})$  est bijective de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  ssi  $\vec{f} \in Gl(E) \Rightarrow GA(\mathcal{E}) = \{f \in Aff(\mathcal{E}) \text{ bijective}\}$  est un groupe

**Preuve :** 1  $\Rightarrow f(M) = B \Leftrightarrow M = A + (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{f(A)B}) \Leftarrow \text{contr: } \vec{f} \text{ non surj} \Rightarrow \vec{w} \notin \text{Im } \vec{f}, f(A) + \vec{w} \notin \text{Im } f$

2  $f^{-1} \in Aff ? B = f(A) \overrightarrow{f^{-1}(B)f^{-1}(M)} = \overrightarrow{Af^{-1}(M)} = (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{f(A)f(f^{-1}(M))}) = (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{BM})$

## III. Barycentres et convexité

$\{(A_i, \lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\}$   $n$  points pondérés  $((A_1 \dots A_n) \in \mathcal{E}^n, (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ avec } \sum_{j=1}^n \lambda_j \neq 0)$

Il existe un unique point  $G = Bar\{(A_i, \lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\} \in \mathcal{E}$  tel que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \overrightarrow{GA_j} = 0_E$

$G$  est le barycentre du système de points  $\{(A_i, \lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, Bar\{(A_i, \alpha \lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\} = Bar\{(A_i, \lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\}$

$G = Bar\{(A_i, \lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{E}, G = B + \frac{1}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} \sum_{j=1}^n \lambda_j \overrightarrow{BA_j}$  On note, si  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, G = \sum_{j=1}^n \lambda_j A_j$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 = Bar\{(A_j, \lambda_j), j \in \mathbb{N}_n\}, \alpha = \sum_{j=1}^n \lambda_j \neq 0 \\ G_2 = Bar\{(B_j, \mu_j), j \in \mathbb{N}_p\}, \beta = \sum_{j=1}^p \mu_j \neq 0 \Rightarrow Bar\{(A_1, \lambda_1) \dots (A_n, \lambda_n), (B_1, \mu_1) \dots (B_p, \mu_p)\} = Bar\{(G_1, \alpha), (G_2, \beta)\} \\ \alpha + \beta \neq 0 \end{array} \right.$$

$f \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  est une application affine ssi elle préserve les barycentres

**Preuve :**  $\Rightarrow \vec{f}(\sum \lambda_j \overrightarrow{GA_j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \lambda_j \overrightarrow{f(G)f(A_j)} \in \mathcal{E} + f \text{ prés. bar : } \text{Mq}\varphi : \vec{v} \mapsto \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{v})} \text{ lin}$   
 $*M = A + \vec{u}, N = A + \vec{v}, D = N + \vec{u} : D = \text{Bar}\{(A, -1), (M, 1), (N, 1)\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$   
 $*\alpha \in \mathbb{R}; B = A + \vec{v}, C = A + \alpha\vec{v}; C = \text{Bar}\{(A, 1-\alpha), (B, \alpha)\} \Rightarrow f(C) = \text{Bar}\{(f(A), 1-\alpha), (f(B), \alpha)\} \dots$

$\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sea de directions  $F$  et  $G : \mathcal{F}$  est parallèle à  $\mathcal{G}$  si  $F \subset G$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont parallèles entre eux si  $F = G$

$$\mathcal{F} // \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset \text{ ou } \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}$$

Une application affine préserve le parallélisme :

si  $\mathcal{F}$  est un sea de direction  $F$  et  $f \in \text{Aff}(\mathcal{E}), f(\mathcal{F})$  est un sea de direction  $\vec{f}(F)$

On se place désormais en dimension finie

Un repère cartésien de  $\mathcal{E}$  est la donnée d'un point  $\Omega \in \mathcal{E}$  et d'une base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$  de  $E : \mathcal{R} = (\Omega, (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n))$

Changement de repère :  $\mathcal{R}_0 = (O, (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n))$  autre repère de  $\mathcal{E}$ . Soit  $P$  matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$

Soit  $\mathcal{M} \in \mathcal{E}, X_0 = \mathcal{M}_{\text{at}_{\mathcal{B}_0}}(\overrightarrow{OM}), X_0 = \mathcal{M}_{\text{at}_{\mathcal{B}}}(\overrightarrow{\Omega M}), X_\Omega = \mathcal{M}_{\text{at}_{\mathcal{B}_0}}(\overrightarrow{O\Omega})$  On a :  $X_0 = X_\Omega + PX$

Soit  $f \in \text{Aff}(\mathcal{E}), A = \mathcal{M}_{\text{at}_{\mathcal{B}_0}}(\vec{f}), B = \mathcal{M}_{\text{at}_{\mathcal{B}_0}}(\overrightarrow{Of(O)}), X = \mathcal{M}_{\text{at}_{\mathcal{B}_0}}(\overrightarrow{OM})$  et  $Y = \mathcal{M}_{\text{at}_{\mathcal{B}_0}}(\overrightarrow{Of(M)})$ , on a :  $Y = AX + B$   
 $(A_0 \dots A_n)$  sont en position générale si  $(\overrightarrow{A_0 A_1} \dots \overrightarrow{A_0 A_n})$  forme une famille libre

$\mathcal{E}$  sea de dimension  $n$  et de direction  $E. (A_0 \dots A_n) n+1$  points en position générale.

Pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , il existe un unique  $(\lambda_0 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que 
$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1 \\ M = \text{Bar}\{(A_j, \lambda_j), j \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \end{cases}$$
  
 $(\lambda_0 \dots \lambda_n)$  sont les coordonnées barycentriques de  $M$

**Preuve :**  $(\overrightarrow{A_0 A_1} \dots \overrightarrow{A_0 A_n})$  base de  $E \Rightarrow$  Existence et unicité coordonnées de  $\overrightarrow{A_0 M}$  dans  $(\overrightarrow{A_0 A_1} \dots \overrightarrow{A_0 A_n})$

$(M_0, M_1, M_2) \in \mathcal{P}^3, \forall j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, M_j : \begin{cases} (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \text{ ses coordonnées barycentriques dans } (A, B, C) \in \mathcal{P}^3 \\ (x_j, y_j) \text{ ses coordonnées cartésiennes dans } \mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \end{cases}$

$$M_0, M_1, M_2 \text{ alignés ssi } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ssi } \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

$(A_0, \vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$  repère de  $\mathcal{E}. \forall B_0 \in \mathcal{E}$  et  $(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) \in E^n, \exists! f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  tel que 
$$\begin{cases} f(A_0) = B_0 \\ \forall j \in \mathbb{N}_n, \vec{f}(\vec{e}_j) = \vec{v}_j \end{cases}$$

$(A_0 \dots A_n) n+1$  points de  $\mathcal{E}$  en position générale.  $\forall (B_0 \dots B_n) \in \mathcal{E}^{n+1}, \exists! f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  tel que  $\forall j \in \mathbb{N}_n, f(A_j) = B_j$

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  est un sea de  $\mathcal{E}$  ssi il est stable par barycentre

**Preuve :**  $\Rightarrow \overrightarrow{A_0 G} = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \lambda_j} \sum_{j=1}^n \lambda_j \overrightarrow{A_0 A_j} \in F \dots \Leftarrow \text{Bar}\{(A_0, 1-\alpha+\beta), (B, \alpha), (C, \beta)\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} = A_0 + F$  sea

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, [A, B] = \{(1-t)A + tB, t \in [0, 1]\} = \{Ba \mid (A, \alpha), (B, \beta), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$$

$C \subset \mathcal{E}$  est convexe si  $\forall (A, B) \in C^2, [A, B] \subset C$

Un sea est convexe

Toute partie  $C \subset \mathcal{E}$  est convexe ssi elle est stable par barycentres à coefficients positifs

**Preuve :**  $\Rightarrow$  rec :  $\alpha_j \geq 0 \Rightarrow$  Si  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 0, \forall j, \alpha_j = 0$ . Sinon, barycentre partiel

Si  $(C_j)_{j \in J}$  est une famille de parties convexes,  $\bigcap_{j \in J} C_j$  est convexe

Il existe une unique plus petite partie convexe contenant  $A \subset \mathcal{E}$  : c'est l'enveloppe convexe de  $A$  ( $\bigcap_{\substack{A \subset C_j \\ C_j \text{ cvxe}}} C_j$ )

L'enveloppe convexe de  $A$  est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de  $A$

**Preuve :**  $\Gamma = \{\text{bary coef} \geq 0 \text{ pts de } A\}$ .  $C$  env cvxe  $A$ .  $C$  stable par bary  $\geq 0 \Rightarrow \Gamma \subset C$ , Asso bary  $\Rightarrow \Gamma$  cvxe

$p \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  tel que  $p \circ p = p \Rightarrow \vec{p}$  est un projecteur vectoriel de  $E$  sur  $F = \text{Im } \vec{p}$  parallèlement à  $G = \ker \vec{p}$

L'ensemble des points fixes de  $p$  est  $\mathfrak{F}$  sea de direction  $F$ , pour tout  $A \in \mathcal{E}, \overline{Ap(A)} \in G$

$p$  est la projection sur  $\mathfrak{F}$  parallèlement à  $G$

$$\forall A \in \mathcal{E}, \exists ! B \in \mathfrak{F} = C + F \text{ tq } \overline{AB} \in G : B = p(A) = C + \vec{u} \text{ où } \overline{CA} = \vec{u} + \vec{v} \text{ avec } \vec{u} \in F \text{ et } \vec{v} \in G$$

$s \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  tel que  $s \circ s = Id_E \Rightarrow \vec{s}$  est une symétrie vectorielle par rapport à  $F = \ker(\vec{s} - Id_E)$ , parallèlement à  $G = \ker(\vec{s} + Id_E)$ .

$$\forall A \in \mathcal{E}, \begin{cases} \overline{As(A)} \in G \\ \frac{A + s(A)}{2} \in \mathfrak{F} = \{\text{pts fixes de } s\} \text{ sea de dir } F \end{cases} \text{ détermine un unique point } s(A)$$

#### IV. Géométrie affine euclidienne

$E$  sera désormais un *ev* euclidien, de produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et de norme associée  $\| \cdot \|$

$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2$ , on définit  $d(A, B) = \|\overline{AB}\|$ .  $d$  est une distance sur  $\mathcal{E}$

$\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{G}$  deux sea de directions  $F$  et  $G$ .  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{G}$  sont orthogonaux si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux

$\mathfrak{F}$  sea de direction  $F$  Le projecteur orthogonal sur  $\mathfrak{F}$  est le projecteur sur  $\mathfrak{F}$  parallèlement à  $F^\perp$

$$\forall M \in \mathcal{E}, M' = p(M) \Leftrightarrow M' \in \mathfrak{F} \text{ et } \overline{MM'} \perp F$$

La symétrie orthogonale p/r  $\mathfrak{F}$  est la symétrie p/r  $\mathfrak{F}$  parallèlement à  $F^\perp$

$$\forall M \in \mathcal{E}, M' = s(M) \Leftrightarrow \frac{M + M'}{2} \in \mathfrak{F} \text{ et } \overline{MM'} \perp F$$

Une réflexion affine est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan affine

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \text{ il existe une unique réflexion affine telle que } s(A) = B \quad \left( \mathcal{F} = \frac{A+B}{2} + \text{Vect}(\overrightarrow{AB})^\perp \right)$$

$f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  est une isométrie si elle préserve la distance :  $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(f(A), f(B)) = d(A, B)$

$f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  est une isométrie ssi  $\vec{f} \in \mathcal{O}(E)$

$\text{Isom}(\mathcal{E}) = \text{Is}(\mathcal{E}) = \{f \text{ isométrie de } \mathcal{E}\}$  est un sous groupe de  $\text{GA}(\mathcal{E})$

$f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$  est une isométrie directe si  $\vec{f} \in \text{SO}(E)$  ( $f$  préserve l'orientation), une isométrie indirecte sinon

$\text{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{\text{isométries directes de } \mathcal{E}\}$

Déplacement : isométrie directe. Antidéplacement : isométrie indirecte

Une isométrie préserve : barycentre, alignement, parallélisme, distance, orthogonalité et angle (non orienté)

$\dim \mathcal{E} = 2$   $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$  est l'ensemble des rotations et des translation du plan

Si  $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$  est indirecte,  $f = t_{\vec{w}} \circ s$  avec  $s \text{ sym } \perp \text{ p/r } \mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u}$  et  $\vec{w} \in \text{Vect}(\vec{u})$

Les réflexions engendrent les isométries

$\dim \mathcal{E} = 3$   $f \in \text{Isom}^+(\mathcal{E}) \Leftrightarrow f = t_{\vec{v}} \circ r$  où  $r$  rotation d'axe  $\mathcal{D} = A_0 + \mathbb{R}\vec{u}$  et  $\vec{v} \in \text{Vect}(\vec{u})$

Un tel  $f$  est appelé vissage d'axe  $\mathcal{D}$  d'angle  $\theta$  et de vecteur  $\vec{v}$

Les rotations d'angle  $\pi$  sont appelées retournements

Une similitude de rapport  $k \in \mathbb{R}_+^*$  est une application  $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  tq :  $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(f(A), f(B)) = kd(A, B)$

$f$  est une similitude de  $\mathcal{E}$  ssi  $\vec{f} \in \mathbb{R}_+^* \mathcal{O}(E)$  càd  $\vec{f} = k\varphi$  où  $k \in \mathbb{R}_+^*, \varphi \in \mathcal{O}(E)$

$f$  est une similitude directe si elle préserve l'orientation ssi  $\det(\vec{f}) > 0$  ssi  $\vec{f} = k\varphi, k \in \mathbb{R}_+^*, \varphi \in \text{SO}(E)$

Une similitude conserve : barycentre, alignement, parallélisme, orthogonalité, et angle (non orienté)

Elle multiplie les distance par  $k$ , les aires par  $k^2$

$\dim \mathcal{E} = 2$  Similitudes directes : de la forme :  $f \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow \mathcal{E} \\ M(z) & \mapsto M'(z') \text{ où } z' = az + b \end{cases} \quad (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

Similitudes indirectes :  $\tilde{f} : z \mapsto a\bar{z} + b$

Soient  $A, B, A', B' \in \mathcal{E}, A \neq B$  et  $A' \neq B'$   $\exists! f \in \text{Sim}^+(\mathcal{E})$  tq  $\begin{cases} s(A) = A' \\ s(B) = B' \end{cases}$

**Preuve :**  $\begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases} \Rightarrow \det = z_{A'} - z_{B'} \neq 0 \Rightarrow \text{unique sol. } a \neq 0, \text{ sinon } z_{A'} = z_{B'}$

En pratique, si  $S = (AB) \cap (A'B'), \Omega \in \mathcal{C}_{(SAA')} \cap \mathcal{C}_{(SBB')}$  (thm angles inscrits)