Chap 29 : Géométrie affine

I. Sous-espace affine d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

E est un $\mathbb{R}-ev$

La translation de vecteur $a \in E$ est : $\tau_a \begin{cases} E \to E \\ v \mapsto v+a \end{cases}$

$\begin{cases} (E,+) \to (\mathfrak{S}(E),\circ) \\ a \quad\quad \mapsto \tau_a \end{cases}$ est un morphisme de groupe $\Rightarrow \mathfrak{T}(E) = \{\text{translations}\}$ est un groupe commutatif

$\mathfrak{F} \subset E$ est un sous-espace affine de E s'il est l'image par une translation d'un sev F de E : $\mathfrak{F} = \tau_a(F)$ $(a \in E)$

Tout *sev* est un *sea* $\quad$ E est un *sea* de E : On note $\mathcal{E}$ le *sea* E de E

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés points de l'espace affine $\mathcal{E}$

On dispose d'une bijection $\begin{cases} \mathcal{E} \to E \\ M \mapsto \overrightarrow{OM} \end{cases}$ où O est le point de $\mathcal{E}$ associé à 0_E

Définition d'un espace affine : ensemble de points $\mathcal{E}$ tel qu'il existe un ev E (la direction de $\mathcal{E}$) :

$\forall A \in \mathcal{E},\ \varphi_A \begin{cases} \mathcal{E} \to E \\ B \mapsto \varphi_A(B) = \overrightarrow{AB} \end{cases}$ remplit ces conditions : $\begin{cases} \forall A,B \in \mathcal{E}^2, \varphi_A(B) = 0_E \Leftrightarrow A = B \\ \forall A,B,C \in \mathcal{E}^3, \varphi_A(C) = \varphi_A(B) + \varphi_B(C) \end{cases}$

$\forall A \in \mathcal{E},\ \varphi_A$ est donc une bijection qui permet d'identifier $\mathcal{E}$ à E (on se fixe A comme origine)

$A \in \mathcal{E}$ fixé, associé à $a \in E$. $\forall B \in \mathcal{E}$ associé à $b \in E$, il existe un unique vecteur $\vec{v} = b - a = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\forall (A,B,C) \in \mathcal{E}^3 \quad\quad \overrightarrow{AB} = 0_E \Leftrightarrow A = B \quad\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\begin{cases} \mathcal{E} \to E \\ B \mapsto \overrightarrow{AB} \end{cases}$ est une bijection d'inverse $\begin{cases} E \to \mathcal{E} \\ v \mapsto \text{l'unique } B \text{ tq } \overrightarrow{AB} = \vec{v} \end{cases}$: on note $B = A + \vec{v}$, $\vec{u} = B - A$

Si A est le point de $\mathcal{E}$ associé à $a \in E$, on peut noter $\mathfrak{F} = \tau_a(F) = A + F$ où F sev de E

On n'a pas de *lci* $+/-$ sur $\mathcal{E}$, ce ne sont que des notations

$\mathfrak{F}$ *sea* de E. Il existe un unique *sev* F de E tel que $\mathfrak{F} = \tau_a(F)$, où $a \in E$. Ce *sev* F est appelé direction de $\mathfrak{F}$

Preuve : $\mathfrak{F} = \tau_a(F) = \tau_c(G)$. $B \in \mathcal{F}$. Mq $F = \{\overrightarrow{AB} / B \in \mathcal{F}\}, G = \{\overrightarrow{CB}\}$.$\vec{u} \in F : \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{=-\overrightarrow{CA} \in G} + \underbrace{\overrightarrow{CB}}_{\in G} \in G$

$\mathfrak{F} = A + F$, $\mathfrak{G} = B + G$ deux *sea* de $\mathcal{E}$. $\quad \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$ est $\begin{cases} \text{soit vide} \\ \text{soit un } sea \text{ de direction } F \cap G \end{cases}$

Preuve : $C \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} \Rightarrow (M \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \in F$ et $\overrightarrow{CM} \in G \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \in F \cap G \Leftrightarrow M \in C + (F \cap G))$

E ev de dim finie. $\forall \mathfrak{F}$ *sea* de E, on définit la dimension de $\mathfrak{F}$ comme étant la dimension de sa direction

II. Applications affines

$\mathcal{E}$ sera un espace affine associé à un $\mathbb{R}-ev\ E$

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ e.aff. de directions E ef F. $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est une application affine s'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{f} \in \mathfrak{L}(E,F)$ tq :

$\forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM})$, c'est à dire $f(M) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$

On a alors, pour tout $b \in \mathcal{E}$, $\forall M \in \mathcal{E}, f(M) = f(B) + \vec{f}(\overrightarrow{BM})$ $\qquad$ $\vec{f}$ est appelée partie linéaire de f

Preuve : $\overrightarrow{f(B)f(M)} = \overrightarrow{f(B)f(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) - \vec{f}(\overrightarrow{BM}) = \vec{f}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \vec{f}(\overrightarrow{BM})$

f et g applications affines de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G} \Rightarrow g \circ f$ est une app. affine de partie linéaire $\vec{g} \circ \vec{f}$

$Aff(\mathcal{E}) = \{ f \in \mathfrak{F}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ application affine$\}$

$f \in Aff(\mathcal{E}), A_0 \in E.$ $\quad \exists!(\vec{u} \in E, g \in Aff(\mathcal{E}))$ tq $g(A_0) = A_0$ et $f = \tau_{\vec{u}} \circ g$

$f \in Aff(\mathcal{E}), \Omega = \{$points fixes de $f\}$. On a : soit $\Omega = \varnothing$, soit Ω est un *sea* de direction $\ker(\vec{f} - Id_E)$

$f \in Aff(\mathcal{E})$ et $(\vec{f} - Id_E) \in Gl(E) \Rightarrow f$ a un unique point fixe M dans $\mathcal{E}$ $\qquad (M = B + (\vec{f} - Id_E)^{-1}(\overrightarrow{f(B)B}))$

$f \in Aff(\mathcal{E})$ est une translation *ssi* $\vec{f} = Id_E$

$f \in Aff(\mathcal{E})$ est une homothétie de rapport λ *ssi* $\vec{f} = \lambda Id_E$

$\{$homothéties de $\mathcal{E}$ (de rapport non nul)$\} \cup \{$translations de $\mathcal{E}\}$ forme un groupe (pour $\circ$)

$f \in Aff(\mathcal{E})$ est bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ *ssi* $\vec{f} \in Gl(E)$ $\qquad \Rightarrow GA(\mathcal{E}) = \{ f \in Aff(\mathcal{E})$ bijective$\}$ est un groupe

Preuve : $1 \Rightarrow f(M) = B \Leftrightarrow M = A + (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{f(A)B})$ $\qquad \Leftarrow$ contr: $\vec{f}$ non surj $\Rightarrow \vec{w} \notin \operatorname{Im} \vec{f}, f(A) + \vec{w} \notin \operatorname{Im} f$

$2\ f.^{-1} \in Aff\ ?\ B = f(A)\ \overrightarrow{f^{-1}(B)f^{-1}(M)} = \overrightarrow{Af^{-1}(M)} = (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{f(A)f(f^{-1}(M))} = (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{BM})$

III. Barycentres et convexité

$\{(A_i,\lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\}$ n points pondérés ($(A_1...A_n) \in \mathcal{E}^n, (\lambda_1...\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, avec $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \neq 0$)

Il existe un unique point $G = Bar\{(A_i,\lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\} \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{GA_j} = 0_E$

G est le barycentre du système de points $\{(A_i,\lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, Bar\{(A_i,\alpha\lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\} = Bar\{(A_i,\lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\}$

$G = Bar\{(A_i,\lambda_i), i \in \mathbb{N}_n\} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{E}, G = B + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{BA_j}$ $\qquad$ On note, si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, $\ G = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 = Bar\{(A_j,\lambda_j), j \in \mathbb{N}_n\}, \alpha = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \neq 0 \\ G_2 = Bar\{(B_j,\mu_j), j \in \mathbb{N}_p\}, \beta = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \neq 0 \\ \alpha + \beta \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow Bar\{(A_1,\lambda_1)...(A_n,\lambda_n),(B_1,\mu_1)...(B_p,\mu_p)\} = Bar\{(G_1,\alpha),(G_2,\beta)\}$$

$f \in \mathfrak{F}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ est une application affine *ssi* elle préserve les barycentres

Preuve : $\Rightarrow \vec{f}(\sum \lambda_j \overrightarrow{GA_j}) = 0_E \Leftrightarrow = \sum \lambda_j \overrightarrow{f(G)f(A_j)} \quad 0_E \quad + f$ prés. bar : Mq $\varphi : \vec{v} \mapsto \overrightarrow{f(A)f(A \quad v)}$ lin

$*M = A + \vec{u}, N = A + \vec{v}, D = N + \vec{u} : D = Bar\{(A,-1),(M,1),(N,1)\} \Rightarrow ... \Rightarrow \varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$

$*\alpha \in \mathbb{R}; B = A + \vec{v}, C = A + \alpha\vec{v}; C = Bar\{(A,1-\alpha),(B,\alpha)\} \Rightarrow f(C) = Bar\{(f(A),1-\alpha),(f(B),\alpha)\}...$

$\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ deux *sea* de directions F et G : $\mathfrak{F}$ est parallèle à $\mathfrak{G}$ si $F \subset G$, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont parallèles entre eux si $F = G$

$\mathfrak{F} // \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} = \varnothing$ ou $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{F}$

Une application affine préserve le parallélisme :

si $\mathfrak{F}$ est un *sea* de direction F et $f \in Aff(\mathcal{E})$, $f(\mathfrak{F})$ est un sea de direction $\vec{f}(F)$

On se place désormais en dimension finie

Un repère cartésien de $\mathcal{E}$ est la donnée d'un point $\Omega \in \mathcal{E}$ et d'une base $\mathfrak{B} = (\vec{e_1}...\vec{e_n})$ de $E : \mathfrak{R} = (\Omega,(\vec{e_1}...\vec{e_n}))$

Changement de repère : $\mathfrak{R}_0 = (O, \underbrace{(\vec{u_1}...\vec{u_n})}_{\mathfrak{B}_0})$ autre repère de $\mathcal{E}$. Soit P matrice de passage de $\mathfrak{B}_0$ à $\mathfrak{B}$

Soit $\mathfrak{M} \in \mathcal{E}, X_0 = \mathfrak{Mat}_{\mathfrak{B}_0}(\overrightarrow{OM}), X_0 = \mathfrak{Mat}_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{\Omega M}), X_\Omega = \mathfrak{Mat}_{\mathfrak{B}_0}(\overrightarrow{O\Omega})$ On a : $X_O = X_\Omega + PX$

Soit $f \in Aff(\mathcal{E}), A = \mathfrak{Mat}_{\mathfrak{B}_0}(\vec{f}), B = \mathfrak{Mat}_{\mathfrak{B}_0}(\overrightarrow{Of(O)}), X = \mathfrak{Mat}_{\mathfrak{B}_0}(\overrightarrow{OM})$ et $Y = \mathfrak{Mat}_{\mathfrak{B}_0}(\overrightarrow{Of(M)})$, on a : $Y = AX + B$

$(A_0...A_n)$ sont en position générale si $(\overrightarrow{A_0A_1}...\overrightarrow{A_0A_n})$ forme une famille libre

$\mathcal{E}$ *ea* de dimension n et de direction E. $(A_0...A_n)$ $n+1$ points en position générale.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique $(\lambda_0...\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1 \\ M = Bar\{(A_j,\lambda_j), j \in [\![0,n]\!]\} \end{cases}$

$(\lambda_0...\lambda_n)$ sont les coordonnées barycentriques de M

Preuve : $(\overrightarrow{A_0A_1}...\overrightarrow{A_0A_n})$ base de $E \Rightarrow$ Existence et unicité coordonnées de $\overrightarrow{A_0M}$ dans $(\overrightarrow{A_0A_1}...\overrightarrow{A_0A_n})$

$(M_0,M_1,M_2) \in \mathcal{P}^3$, $\forall j \in [\![0,2]\!], M_j : \begin{cases} (\alpha_j,\beta_j,\gamma_j) \text{ ses coordonnées barycentriques dans } (A,B,C) \in \mathcal{P}^3 \\ (x_j,y_j) \text{ ses coordonnées cartésiennes dans } \mathfrak{R} = (O,\vec{e_1},\vec{e_2}) \end{cases}$

M_0,M_1,M_2 alignés *ssi* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ *ssi* $\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$

$(A_0,\vec{e_1}...\vec{e_n})$ repère de $\mathcal{E}$. $\forall B_0 \in \mathcal{E}$ et $(\vec{v_1}...\vec{v_n}) \in E^n$, $\exists! f \in Aff(\mathcal{E})$ tel que $\begin{cases} f(A_0) = B_0 \\ \forall j \in \mathbb{N}_n, \vec{f}(\vec{e_j}) = \vec{v_j} \end{cases}$

$(A_0...A_n)$ $n+1$ points de $\mathcal{E}$ en position générale. $\forall (B_0...B_n) \in \mathcal{E}^{n+1}, \exists! f \in Aff(\mathcal{E})$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}_n, f(A_j) = B_j$

$\mathfrak{F} \subset \mathcal{E}$ est un *sea* de $\mathcal{E}$ *ssi* il est stable par barycentre

Preuve : $\Rightarrow \overrightarrow{A_0G} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{A_0A_j} \in F ... \Leftarrow Bar\{(A_0,1-\alpha+\beta),(B,\alpha),(C,\beta)\} \in \mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{F} = A_0 + F$ sea

$\forall (A,B)\in \mathcal{E}^2, [A,B]=\{(1-t)A+tB, t\in[0,1]\}=\{Bar((A,\alpha),(B,\beta)), (\alpha,\beta)\in \mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}\}$

$C\subset \mathcal{E}$ est convexe si $\forall (A,B)\in C^2, [A,B]\subset C$

Un sea est convexe

Toute partie $C\subset \mathcal{E}$ est convexe *ssi* elle est stable par barycentres à coefficients positifs

Preuve : $\Rightarrow rec : \alpha_j \geq 0 \Rightarrow$ Si $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j = 0, \forall j, \alpha_j = 0$. Sinon, barycentre partiel

Si $(C_j)_{j\in J}$ est une famille de parties convexes, $\bigcap_{j\in J} C_j$ est convexe

Il existe une unique plus petite partie convexe contenant $A\subset \mathcal{E}$: c'est l'enveloppe convexe de A ($\bigcap_{\substack{A\subset C_j \\ C_j \text{ cvxe}}} C_j$)

L'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A

Preuve : $\Gamma = \{$bary coef ≥ 0 pts de $A\}$.C evp cvxe A.C stable par bary $\geq 0 \Rightarrow \Gamma\subset C$, Asso bary $\Rightarrow \Gamma$ cvxe

$p\in Aff(\mathcal{E})$ tel que $p\circ p = p \Rightarrow \vec{p}$ est un projecteur vectoriel de E sur $F=\operatorname{Im}\vec{p}$ parallèlement à $G=\ker\vec{p}$

L'ensemble des points fixes de p est $\mathfrak{F}$ *sea* de direction F, pour tout $A\in\mathcal{E}, \overrightarrow{Ap(A)}\in G$

p est la projection sur $\mathfrak{F}$ parallèlement à G

$\forall A\in \mathcal{E}, \exists! B\in \mathfrak{F} = C+F$ tq $\overrightarrow{AB}\in G : B = p(A) = C+\vec{u}$ où $\overrightarrow{CA}=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}\in F$ et $\vec{v}\in G$

$s\in Aff(\mathcal{E})$ tel que $s\circ s = Id_E \Rightarrow \vec{s}$ est une symétrie vectorielle par rapport à $F=\ker(\vec{s}-Id_E)$,

parallèlement à $G=\ker(\vec{s}+Id_E)$.

$\forall A\in\mathcal{E}, \begin{cases} \overrightarrow{As(A)}\in G \\ \dfrac{A+s(A)}{2}\in \mathfrak{F} = \{\text{pts fixes de } s\} \textit{ sea} \text{ de dir } F \end{cases}$ détermine un unique point $s(A)$

IV. Géométrie affine euclidienne

E sera désormais un *ev* euclidien, de produit scalaire $\langle .|.\rangle$ et de norme associée $\|.\|$

$\forall (A,B)\in\mathcal{E}^2$, on définit $d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. d est une distance sur $\mathcal{E}$

$\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ deux *sea* de directions F et G. $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont orthogonaux si F et G sont orthogonaux

$\mathfrak{F}$ *sea* de direction F Le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{F}$ est le projecteur sur $\mathfrak{F}$ parallèlement à $F^\perp$

$$\forall M\in\mathcal{E}, M' = p(M) \Leftrightarrow M'\in\mathfrak{F} \text{ et } \overrightarrow{MM'}\perp F$$

La symétrie orthogonale p/r $\mathfrak{F}$ est la symétrie p/r $\mathfrak{F}$ parallèlement à $F^\perp$

$$\forall M\in\mathcal{E}, M' = s(M) \Leftrightarrow \frac{M+M'}{2}\in\mathfrak{F} \text{ et } \overrightarrow{MM'}\perp F$$

Une réflexion affine est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan affine

$\forall (A,B)\in \mathcal{E}^2$, il existe une unique réflexion affine telle que $s(A)=B$ $\qquad (\mathfrak{F}=\dfrac{A+B}{2}+Vect(\overrightarrow{AB})^{\perp})$

$f\in Aff(\mathcal{E})$ est une isométrie si elle préserve la distance : $\forall (A,B)\in \mathcal{E}^2$, $d(f(A),f(B))=d(A,B)$

$f\in Aff(\mathcal{E})$ est une isométrie *ssi* $\vec{f}\in \mathcal{O}(E)$

$Isom(\mathcal{E})=Is(\mathcal{E})=\{f$ isométrie de $\mathcal{E}\}$ est un sous groupe de $GA(\mathcal{E})$

$f\in Isom(\mathcal{E})$ est une isométrie directe si $\vec{f}\in SO(E)$ (f préserve l'orientation), une isométrie indirecte sinon

$Isom^{+}(\mathcal{E})$ ={isométries directes de $\mathcal{E}$}

Déplacement : isométrie directe. Antidéplacement : isométrie indirecte

Une isométrie préserve : barycentre, alignement, parallélisme, distance, orthogonalité et angle (non orienté)

$\dim \mathcal{E}=2$ $\qquad Isom^{+}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des rotations et des translation du plan

Si $f\in Isom(\mathcal{E})$ est indirecte, $f=t_{\vec{w}}\circ s$ avec s sym $\perp$ p/r $\mathfrak{D}=A+\mathbb{R}\vec{u}$ et $\vec{w}\in Vect(\vec{u})$

Les réflexions engendrent les isométries

$\dim \mathcal{E}=3$ $\qquad f\in Isom^{+}(\mathcal{E})\Leftrightarrow f=t_{\vec{v}}\circ r$ où r rotation d'axe $\mathfrak{D}=A_0+\mathbb{R}\vec{u}$ et $\vec{v}\in Vect(\vec{u})$

Un tel f est appelé vissage d'axe $\mathfrak{D}$ d'angle θ et de vecteur $\vec{v}$

Les rotations d'angle π sont appelées retournements

Une similitude de rapport $k\in \mathbb{R}_{+}^{*}$ est une application $f\in Aff(\mathcal{E})$ tq : $\forall (A,B)\in \mathcal{E}^2$, $d(f(A),f(B))=kd(A,B)$

f est une similitude de $\mathcal{E}$ *ssi* $\vec{f}\in \mathbb{R}_{+}^{*}\mathcal{O}(E)$ *càd* $\vec{f}=k\varphi$ où $k\in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $\varphi\in \mathcal{O}(E)$

f est une similitude directe si elle préserve l'orientation *ssi* $\det(\vec{f})>0$ *ssi* $\vec{f}=k\varphi$, $k\in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $\varphi\in SO(E)$

Une similitude conserve : barycentre, alignement, parallélisme, orthogonalité, et angle (non orienté)

Elle multiplie les distance par k, les aires par k^2

$\dim \mathcal{E}=2$ $\qquad$ Similitudes directes : de la forme : $f\begin{cases}\mathcal{E} & \to \mathcal{E}\\ M(z) & \mapsto M'(z') \text{ où } z'=az+b\end{cases}$ $\qquad (a,b)\in \mathbb{C}^{*}\times\mathbb{C}$

Similitudes indirectes : $\tilde{f}: z\mapsto a\bar{z}+b$

Soient $A,B,A',B'\in \mathcal{E}$, $A\neq B$ et $A'\neq B'$ $\qquad \exists!\, f\in Sim^{+}(\mathcal{E})$ tq $\begin{cases}s(A)=A'\\ s(B)=B'\end{cases}$

Preuve : $\begin{cases}az_A+b=z_{A'}\\ az_B+b=z_{B'}\end{cases}\Rightarrow \det = z_A-z_B\neq 0\Rightarrow$ unique sol. $a\neq 0$, sinon $z_{A'}=b=z_{B'}$

En pratique, si $S=(AB)\cap(A'B'), \Omega\in \mathcal{C}_{(SAA')}\cap \mathcal{C}_{(SBB')}$ (thm angles inscrits)