Chap 28 : Fonctions de plusieurs variables

Quand E sera un espace vectoriel, ce sera un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel

I. Introduction à la topologie

E un ensemble. Une distance sur E est une application $d \in \mathcal{F}(E\times E, \mathbb{R}_+)$ vérifiant :

- $\forall (x,y)\in E^2 \quad d(x,y)=d(y,x)$ (symétrie)
- $\forall (x,y)\in E^2 \quad d(x,y)=0 \Leftrightarrow y=x$ (séparation des points)
- $\forall (x,y,z)\in E^3 \quad d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ (inégalité triangulaire)

(E,d) est alors un espace métrique

(E,N) espace vectoriel normé. $d\begin{cases} E\times E \to \mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto N(x-y)\end{cases}$ est une distance

$E=\mathbb{R}^n \quad \forall p\ge 1 \quad N_p\begin{cases}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \mapsto \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{cases} \quad N_\infty\begin{cases}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \mapsto \max_{j\in\mathbb{N}_n} |x_j|\end{cases}$ sont des normes

$E=\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \quad \forall p\ge 1 \quad N_p\begin{cases}E \to \mathbb{R}_+ \\ f\mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\end{cases} \quad N_\infty\begin{cases}E\to\mathbb{R}_+ \\ f\mapsto \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\end{cases}$ sont des normes

(E,d) espace métrique $\quad a\in E, r>0$

La boule ouverte de centre a et de rayon r est $\mathcal{B}(a,r)=\{y\in E \,/\, d(y,a)<r\}$

La boule fermée de centre a et de rayon r est $\overline{\mathcal{B}}(a,r)=\{y\in E \,/\, d(y,a)\le r\}$

$\Omega\in E$ On dit que Ω est ouvert dans E si $\quad \forall a\in\Omega, \exists r>0$ tq $\mathcal{B}(a,r)\subset\Omega$

$\forall a\in E$, $\forall r>0$, la boule $\mathcal{B}(a,r)$ est ouverte

Une union quelconque d'ouverts est un ouvert

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

$\varnothing$ est un ouvert et E est un ouvert

(E,T) où $T=\{\Omega\subset E,\ \Omega$ ouvert de $E\}$ avec les propriétés ci-dessus définit une topologie

Preuve : pour l'intersection, on prend le min des rayons possibles pour avoir une boule dans chaque ouvert

Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours un ouvert : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right[= \{0\}$

$F\subset E$ (E espace métrique) $\quad F$ est fermé *si* $E\setminus F$ est ouvert

$\forall a\in E, \forall r>0, \overline{\mathcal{B}}(a,r)$ est fermée

$\varnothing$ est fermé, E est fermé

Une union finie de fermés est un fermé

Une intersection quelconque de fermés est un fermé

(E,d) espace métrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ $l \in E$ On dit que la suite admet comme limite l si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \quad d(u_n, l) \leq \varepsilon$ (càd $u_n \in \mathcal{B}(l,\varepsilon)$)

$(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ Si $(u_n)_n$ admet une limite, alors celle ci est unique On dit que $(u_n)_n$ converge vers l

N_1 et N_2 deux normes sur E On dit que N_1 est équivalente à N_2 s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tq
$\forall v \in E, \alpha N_2(v) \leq N_1(v) \leq \beta N_2(v)$ C'est une relation d'équivalence

N_1 et N_2 deux normes sur E Si $\exists \alpha > 0$ tq $\forall v \in E, \quad N_1(v) \leq \alpha N_2(v) \Rightarrow \forall a \in E, \forall r > 0, \underbrace{\mathcal{B}_2(a,r)}_{\text{pour } N_2} \subset \underbrace{\mathcal{B}_1(a,\alpha r)}_{\text{pour } N_1}$

N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E définissent les mêmes ouverts (donc la même topologie)

N_1 et N_2 deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes :
$\forall (u_n) \in E^n, \forall l \in E, \quad (u_n)_n$ converge pour N_1 *ssi* (u_n) converge pour N_2

$a \in E$ Un voisinage de a est un ouvert de E contenant a

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$ *ssi* $\forall V$ voisinage de l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, u_n \in V$
Ω est un ouvert *ssi* Ω est un voisinage de chacun de ses points

$A \subset E$ Il existe un unique plus grand ouvert inclus dans A : c'est l'intérieur de A, noté $\dot{A}$
Il existe un unique plus petit fermé contenant A : c'est l'adhérence de A, noté $\overline{A}$

(E,d) espace métrique $A \subset E$ On a équivalence entre :
$(i)\ x \in \overline{A}$
$(ii)\ \forall r > 0, \exists a \in A \cap \mathcal{B}(x,r)$
$(iii)\ \forall V$ voisinage de $x, \exists a \in A \cap V$
$(iv)\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tq $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$

Preuve : $(ii) \Rightarrow (iv)\ r_n = \dfrac{1}{n}, a_n \in \mathcal{B}\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ $(i) \Rightarrow (ii)$ contr. : $\exists r > 0, \forall a \in A, a \notin \mathcal{B}(x,r)$
$\Rightarrow A \subset F_0 = E \setminus \mathcal{B}(x,r)$ fermé $\supset \overline{A}$ $(ii) \Rightarrow (i)$ contr : $x \notin \overline{A} \Rightarrow x \in E \setminus \overline{A}$ ouvert $\Rightarrow \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \cap \overline{A} = \varnothing$

(E,d) espace métrique $A \subset E$ $\forall x \in E$, on a équivalence entre :
$(i)\ x \in \dot{A}$
$(ii)\ \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset A$
$(iii)\ \exists V$ voisinage de x, $V \subset A$

$\forall (A,B) \subset E \quad \dot{A} \subset A \subset \overline{A} \qquad A \subset B \Rightarrow \begin{cases} \dot{A} \subset \dot{B} \\ \overline{A} \subset \overline{B} \end{cases}$ $\begin{cases} A = \dot{A} \text{ ssi } A \text{ ouvert} \\ A = \overline{A} \text{ ssi } A \text{ fermé} \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{\overline{A}} = \overline{A} \\ \dot{\dot{A}} = \dot{A} \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{A} \cup \dot{B} \subset \overset{\bullet}{\overbrace{A \cup B}} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \end{cases}$

La frontière de $A \subset E$ est $Fr(A) = \partial A = \overline{A} \setminus \dot{A}$

$A \subset E$ est dense dans E si $\overline{A} = E$

On a équivalence entre : – A est dense dans E
– $\forall x_0 \in E, \forall r > 0, \mathcal{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing$
– $\forall x_0 \in E, \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$

$K \subset E$ est compact si on peut extraire de toute suite $(u_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans K

Un compact K est nécessairement fermé

Preuve : On prend $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ CV vers $x_0 \in \overline{K}$, K compact $\Rightarrow$ ss-suite CV dans K + unicité limite

(E,N) ev normé. On dit que $A \subset E$ est borné si $\exists R > 0$ tel que $A \subset \mathcal{B}(0_E, \mathbb{R})$

(E,N) ev normé. Si $K \subset E$ est compact, alors K est borné

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Rightarrow d(x_n, l) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\qquad$ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Rightarrow N(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(l)$

E ev de dim finie, de base $\mathcal{B}_0 = (e_1 \dots e_n)$, muni de la norme $N_\infty : \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto \max\limits_{j\in\mathbb{N}_n} |x_j|$

Pour cette norme, toute partie fermée bornée de E est compacte (FAUX en dimension infinie)

Preuve : $n = 1 \Rightarrow Bolzano - Weierstrass$ $\quad n \in \mathbb{N}$: On construit des ss-suites CV pour chaque e_j + $K = \overline{K}$

II. Fonctions continues

Dans le reste du chapitre, (E,d_1) et (F,d_2) sont deux espaces métriques

$f \in \mathcal{F}(E,F)$ est continue en $a \in E$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $f(\mathcal{B}_1(a,\delta)) \subset \mathcal{B}_2(f(a),\varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in E, d_1(x,a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\quad \forall V$ voisinage de $f(a)$ dans $F, \exists W$ voisinage de a dans E tel que $f(W) \subset V$

Critère séquentiel : $f \in \mathcal{F}(E,F), a \in E$

– f continue en $a \Rightarrow$ $\quad \forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$

– f est continue en a *ssi* $\quad \forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ CV

Preuve : $\Leftarrow$ contr.: f non $\mathcal{C}^0$ en $a, \exists x_n \in \mathcal{B}\left(a, \frac{1}{n}\right)$ tq $d(f(x_n), a) > \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} y_{2n} = a \\ y_{2n+1} = x_n \end{cases} \to a$, $(f(y_n))_n$ non CV

$f \in \mathcal{F}(E,F)$ est continue sur E si elle est continue en tout point de E. On a équivalence entre :

(i) f continue sur E

(ii) $\forall \Omega$ ouvert de $F, f^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans E

$(iii) \forall G$ fermé de $F, f^{-1}(G)$ est fermé dans E

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$ Ω ouvert de $F \Rightarrow \mathcal{B}(f(a),\rho) \subset \Omega$, $\mathcal{C}^0 \Rightarrow \delta > 0, \mathcal{B}(a,\delta) \subset f^{-1}(\mathcal{B}(f(a),\rho) \subset f^{-1}(\Omega)$

$(ii) \Rightarrow (i) a \in E$, $\varepsilon > 0, a \in V_0 = f^{-1}(\mathcal{B}(f(a),E))$ouvert $\Rightarrow \delta > 0 / \mathcal{B}(a,\delta) \subset V_0 \Rightarrow f(\mathcal{B}(a,\delta)) \subset \mathcal{B}(f(a),\varepsilon)$

(E,N_∞) evn de dim FINIE, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est nécessairement continue de E dans F (et même lipschitzienne)

(E,d) métrique, $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ continue$\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$

$\varphi_j : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto x_j \end{cases}$ est continue $\Rightarrow \det \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ A = (a_{ij})_{i,j} \mapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma(j)} \end{cases}$ est continue

$Gl_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

L'image d'un compact par une application continue est un compact

On dit que (E,d) est complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_n \in E^n$ est convergente (dans E)

III. Cas de la dimension finie

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}-ev$ de dimension finie

$\mathcal{B}_0 = (e_1 ... e_n)$ base de E, N_∞ la norme associée $\qquad \forall a \in E, \forall r > 0, \overline{B}(a,r)$ est compacte

$\mathcal{B}_0 = (e_1 ... e_n)$ base de E, N_∞ la norme associée. Soit N une autre norme sur E. Alors N et N_∞ sont équivalentes

Preuve : $*N(v) \le \sum_{j=1}^{n} N(x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} |x_j| N(e_j) \le \left(\sum_{j=1}^{n} N(e_j) \right) \sup_{j \in \mathbb{N}_n} |x_j| = K N_\infty(v) \qquad * \varphi \begin{cases} (E, N_\infty) \to (E,N) \\ v \mapsto v \end{cases}$

$S = \mathbb{S}_\infty^n(0,1) = \{v \in E, N_\infty(v) = 1\}$ borné, fermé (mq suite cv $\in S^{\mathbb{N}}$ ...) $\to$ Compact $\varphi\ \mathcal{C}^0 \Rightarrow \varphi(S)$ compact

Mq $\exists k > 0, \forall v \in \varphi(S), N(v) \ge k$ p.abs ($k_n = \frac{1}{n} \Rightarrow 0_E \in \varphi(S)$, imp) $\qquad \Rightarrow \frac{u}{N_\infty(u)} \in S \Rightarrow \frac{N(u)}{N_\infty(u)} \ge k$

Toutes les normes sur un $\mathbb{R}-ev$ de dimension finie sont équivalentes

$(E,N),(F,N_0)$ ev normés de dimension finie, N_2 une autre norme sur E :

- les compacts de E sont les parties fermées normées
- $(x_n)_n \in E^n \qquad (x_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in E$ pour N ssi $(x_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in E$ pour N_2
- $f \in \mathcal{F}(E,F) \qquad f$ continue sur (E,N) ssi f continue sur (E,N_2)
- toute application linéaire $\varphi : (E,N) \to (F,N_0)$ est continue
- tout sev F de dimension finie est fermé dans E
- tout (E,N) ev normé de dimension finie est complet

N_1, N_2 deux normes. On a équivalence entre : $\qquad (i)\ \varphi = Id_E : \begin{cases} (E,N_1) \to (E,N_2) \\ v \mapsto v \end{cases}$ continue

$(ii)\ \exists k > 0, \forall v \in E, N_2(v) \le k N_1(v)$

Preuve : $(ii) \Rightarrow (i)$ $N_2(\varphi(u) - \varphi(v)) = N_2(u-v) \le k N_1(u-v) \Rightarrow k-lips. \qquad (i) \Rightarrow (ii)$ $\varphi\ \mathcal{C}^0, \Omega = B_{N_2}(0,1)$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(\Omega)$ ouvert ds $(E,N_1) \Rightarrow r / B_{N_1}(0,r) \subset \varphi^{-1}(\Omega) \Rightarrow \forall v \ne 0_E, u = \frac{r}{2} \frac{v}{N_1(v)} \subset B_{N_1}(0,r) \Rightarrow N_2(u) \le 1 ...$

$(E,d_1),(F,d_2),(G,d_3)$ esp. métriques, $f \in \mathcal{F}(E,F), g \in \mathcal{F}(F,G), f\ \mathcal{C}^0$ en a et $g\ \mathcal{C}^0$ en $f(a) \Rightarrow g \circ f\ \mathcal{C}^0$ en a

IV. Continuité de fonctions de plusieurs variables

$E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque, Ω sera un ouvert de E

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$, $a=(a_1 \dots a_n) \in \Omega$, $r>0$ tq $\mathcal{B}_\infty(a,r) \subset \Omega$

On appelle $i^{ème}$ application partielle de f en a l'application $f^i \begin{cases}]a-r;a+r[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a_1 \dots a_{i-1}, x, a_{i+1} \dots a_n) \end{cases}$

$f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ est continue en $a=(a_1 \dots a_n) \in \Omega \Rightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}_n,\ f^i$ est continue en a_i

/!\ La réciproque est fausse /!\

Méthodes pour montrer la (dis)continuité : prendre soit une suite $\left(p.ex. \left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)$, soit $\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$f \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R}^p \\ v \mapsto f(v)=(f_1(v) \dots f_p(v)) \end{cases} \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}^p)$ est continue en $a \in \Omega$ *ssi* $f_1 \dots f_p \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ sont $\mathcal{C}^0$ en a $(prendre\ N_\infty)$

$f_1 \dots f_p$ sont les applications coordonnées de f

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R}^p)$ est un *sev* de $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}^p)$ $\qquad$ $\mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R})$ est une ss-algèbre de $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$

V. Dérivées partielles, différentiabilité

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$, $a \in \Omega$, $r>0$ tq $\mathcal{B}(a,r) \subset \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ $\qquad \delta = \frac{r}{\|h\|} \qquad \varphi_h \begin{cases}]-\delta,\delta[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(a+th) \end{cases}$

On dit que f est dérivable en a selon le vecteur h si φ_h est dérivable en 0.

On note $D_h f(a) = \varphi_h{}'(0)$ la dérivée de f en a selon h

$\mathcal{B}=(e_1 \dots e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, $(x_1 \dots x_n)$ coordonnées d'un vecteur dans $\mathcal{B}$. $\quad f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}), a \in \Omega$

On dit que f admet une j^e dérivée partielle en a si $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) = \varphi_{e_j}{}'(0)$ est défini

f admet une j^e dérivée partielle en a *ssi* l'application partielle f^i est dérivable en a : $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (f^i)'(a)$

f peut admettre des dérivées partielles en a et ne pas être continue en a

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si f admet des dérivées partielles en tout point de Ω et que celles ci sont continues

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$, $a=(a_1 \dots a_n) \subset \Omega$, $r>0$ tq $\mathcal{B}_\infty(a,r) \subset \Omega$,

$\forall h=(h_1 \dots h_n) \in \mathcal{B}_\infty(0,r) \qquad f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \times h_j + \|h\| \times \varepsilon(h)$ où $\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h) = 0$

Preuve : (dim 2 :) $f(a+h)-f(a) \to$ "palier" $f(a_1+h_1,a_2)$, $\quad f^2 : t \mapsto f(a_1+h_1,t) \in \mathcal{D}^1(]a_2-r,a_2+r[,\mathbb{R})$

$TAF : c_2$ tq $d(a_2,c_2) < h_2 \ /\ A_2 = f(a_1+h_1,a_2) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1+h_1,c_2) \times h_2$, Idem, c_1 tq $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(c_1,a_2) h_1$

$$\left| f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a) \times h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a) \times h_2 \right| \le N_\infty(h) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a_1+h_1,c_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right| \right) \underset{h\to 0}{\to} 0$$

$a\in\Omega, r>0$ tq $\mathcal{B}(a,r)\subset\Omega$ $\quad f$ est différentiable en a si $\exists\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

tel que $\forall h\in\mathcal{B}(0,r), f(a+h)=f(a)+\varphi(h)+\|h\|\varepsilon(h)$ où $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

φ est appelée différentielle de f en a et notée $df(a)$ ou $df_{/a}$

Une fonction $\mathcal{C}^1$ est différentiable en tout point de Ω, et $\forall a\in\Omega, df(a): h\mapsto \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j \in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

df a un sens : $df\begin{cases}\Omega\mapsto\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\\ a\mapsto df(a)=df_{/a}\end{cases}$, mais ∂f seul n'a AUCUN SENS

$f\in\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ diff. en $a\in\Omega\Rightarrow$ f admet des dérivées selon tout vecteur en a, et $\forall h\in\mathbb{R}^n, D_h f(a)=df_{/a}(h)$

f diff. en $a\Rightarrow f$ admet n dériv. part. en a $\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=df_{/a}(e_j)\quad df_{/a}: h\mapsto D_h f(a)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\times h_j$

$f\in\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}^p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si chacune des $f_j\in\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ app. coordonées l'est

Chaque f_j admet lui-même n dérivées partielles, et $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\in\mathbb{R}^p$

$f\in\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}^p)$ de classe $\mathcal{C}^1, a\in\Omega, r>0/\mathcal{B}(a,r)\subset\Omega.$ $\forall h\in\mathcal{B}(0,r), f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}h_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\|h\|\underbrace{\varepsilon(h)}_{\underset{h\to 0}{\to}0}$

La jacobienne de f en a : $Jac(f)(a)=\mathcal{M}at_{Can}(df_{/a})=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i\in\mathbb{N}_p j\in\mathbb{N}_n}\in\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})\quad\Rightarrow df_{/a}(h)=J\times\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$

$f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}), \gamma\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})\Rightarrow g\begin{cases}I\to\mathbb{R}\\ t\mapsto f(\gamma(t))\end{cases}$ dér. sur I et $\forall t_0\in I: g'(t_0)=df_{/\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t_0))\times\gamma_j'(t_0)$

Preuve : $\delta/\ f(\gamma(t_0+\delta))=f(\gamma(t_0))+d_{/\gamma(t_0)}f(\delta\gamma'(t_0)+\delta\varepsilon_2(\delta))+\|\delta\gamma'(t_0)+\delta\varepsilon_2(\delta)\|\varepsilon(h)$...

La condition f différentiable en $a=\gamma(t_0)$ et γ dérivable en t_0 est suffisante pour ce théorème

$U\subset\mathbb{R}^q, \Omega\subset\mathbb{R}^n. f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^p), \varphi\in\mathcal{C}^1(U,\Omega)$, $(y_1...y_q)$ et $(x_1...x_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f\circ\varphi\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^p)$, et $\forall j\in\mathbb{N}_q, \forall b\in U\quad \frac{d(f\circ\varphi)}{dy_j}(b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(b))\times\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_j}(b)=df_{/\varphi(b)}(d\varphi_{/b}(f_j))$

C'est à dire, $\forall b\in U, \forall v\in\mathbb{R}^q$, $d(f\circ\varphi)_{/b}=df_{/\varphi(b)}\circ d\varphi_{/b}$

On a la même propriété en remplaçant tous les "$\mathcal{C}^1$" par des "différentiable"

$f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\Rightarrow f$ est $\mathcal{C}^1$ et $\forall a\in\mathbb{R}^n, df_{/a}=f$

On note $dx_j=\varphi_j\begin{cases}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\to x_j\end{cases}$ $\qquad f\in\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ diff en $a\in\Omega\Rightarrow df_{/a}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j$

$Jac(f\circ\varphi)(b)=Jac(f)(\varphi(b))\times Jac(\varphi)(b)$

$U,\Omega\subset\mathbb{R}^n$ deux ouverts. $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. f est un $\mathcal{C}^1$ – difféomorphisme de Ω sur U si
f est bijective de Ω sur U et f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ de U sur $\Omega \Rightarrow df_{/a}\in Gl(\mathbb{R}^n)$, et $(df_{/a})^{-1}=d(f^{-1})_{/f(a)}$

$\varphi\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[& \to \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\in\mathbb{R}_-\}\\ (r,\theta) & \mapsto (r\cos\theta,r\sin\theta)\end{cases}$ est un $\mathcal{C}^1$ – difféomorphisme,

$\varphi^{-1}(x,y)\mapsto\left(\sqrt{x^2+y^2},2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$

$Jac(\varphi)(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$ $Jac(\varphi^{-1})(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}$ $Jac(\varphi^{-1})(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$

$f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ $\quad \tilde{f}=f\circ\varphi$ $\quad \begin{cases}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\\ \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{cases}$

VI. Dérivées d'ordre supérieur

On note $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ la j^e dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (si elle existe), et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}$

Si $df:a\mapsto df_{/a}$ est différentiable : $d^2f_{/a}=d(df)_{/a}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))=\{f$ bilin de $\mathbb{R}^n\}$

$f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ avec $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si elle admet n^2 dérivées partielles d'ordre 2
en tout point, et que ces n^2 fonctions sont toutes $\mathcal{C}^0$ sur Ω

$f\in\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})\Rightarrow\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$

Preuve : $\Delta_{h,k}=f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)$ $\qquad \varphi_h:y\mapsto f(a+h,y)-f(a,y)$

$f\ \mathcal{C}^1\Rightarrow EAF:c_{h,k}/\Delta_{h,k}=\varphi'_h(c_{h,k})\times k=\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,c_{h,k})-\frac{\partial f}{\partial y}(a,c_{h,k})\right)k$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}\ \mathcal{C}^1\Rightarrow EAF:\alpha_{h,k}$ tq

$\Delta_{h,k}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a_{h,k},c_{h,k})\times h\right)\times k$, $f\,\mathcal{C}^2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\Delta_{h,k}}{h\ k}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$ Idem avec $\psi_k:x\mapsto f(x,b+k)-f(x,h)$

Si elles existent, on définit de même $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p}\ldots\partial x_{i_1}}$ (l'ordre est important, sauf si f est de classe $\mathcal{C}^p$)

$f\in\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ où $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $\qquad \forall a\in\Omega$, la Hessienne de f en a :

$Hess(f)(a)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^{\,2}}$ $\qquad f$ est $\mathcal{C}^2\Rightarrow Hess(f)(a)$ est symétrique

$\forall(i,j),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\partial^2 f_{/a}(e_j,e_i)\Rightarrow Hess(f)(a)=\mathfrak{Mat}_{Can}(d^2 f_{/a})$

VII. Etude d'extrema

$f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ différentiable sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si f a un extremum local en $a \in \Omega, df_{/a} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$

Si on recherche les extrema de f sur A quelconque, cette condition n'est valable que sur $\dot{A}$
Dans tous les cas, il faudra valider les candidats (max, min, point selle...)

On montrera plus tard : Toute matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable en BON
càd $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale telle que $M = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$

$f \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. a point critique de f $(df_{/a} = 0_{L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})})$

$H = Hess(f)(a)$ sym $\Rightarrow (w_1,w_2)$ BON tq $\mathcal{M}at_{(w_1,w_2)}(d^2 f_{/a}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\det(H) < 0 \Rightarrow$ point selle $\qquad \det(H) = 0 \Rightarrow$ Inconnu

$$\det(H) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tr}(H) > 0 \text{ ou } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0 \Rightarrow \text{minimum} \\ \operatorname{tr}(H) < 0 \text{ ou } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0 \Rightarrow \text{maximum} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ avec $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $Grad(f)(a) = \nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ $\qquad df_{/a}(h) = \langle \nabla f(a) \mid h \rangle$

VIII. Equations aux dérivées partielles

$\Omega \subset \mathbb{R}^n / \Omega = \prod_{j=1}^{n} I_j$ avec les I_j intervalles de $\mathbb{R}$.

$$\left\{ f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}) / \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \right\} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}) / \forall (x_1 \dots x_n) \in \Omega,\ f(x_1 \dots x_n) = h(x_1 \dots x_{n-1}) \text{ avec } h \in \mathcal{C}^1\left(\prod_{j=1}^{n-1} I_j, \mathbb{R} \right) \right\}$$

Equation des cordes vibrantes : $\left\{ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) / \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \right\} = \left\{ f : (x,y) \mapsto A(x+y) + B(x-y) / A, B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \right\}$

Méthodes : passage en coordonnées polaires, changement de variables pour se ramener à prod. croisé...

$f \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Le Laplacien de f : $\Delta f \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ a \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^{\,2}}(a) \end{cases}$

En coordonées polaires : $\boxed{\Delta f = \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta)}$ (où $\tilde{f} : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$)