Chap 27 : Espaces vectoriels euclidiens

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, et E est un $\mathbb{K}-ev$

I. Produit scalaire

Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi\begin{cases}E\times E\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto\varphi(x,y)\end{cases}$ linéaire p/r à chacune des 2 variables

φ forme bilinéaire sur E est

- symétrique si $\forall(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$
- antisymétrique si $\forall(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=-\varphi(y,x)$
- positive si $\forall x\in E$, $\varphi(x,x)\geq 0$
- définie positive si $\forall x\in E$ $\begin{cases}\varphi(x,x)\geq 0\\\varphi(x,x)=0\Leftrightarrow x=0_E\end{cases}$

φ forme bilinéaire sur E. $\forall x_0\in E$, on définit $\varphi_{x_0}\begin{cases}E\to\mathbb{R}\\y\mapsto\varphi(x_0,y)\end{cases}\in E^*$ On définit alors $\tilde{\varphi}\begin{cases}E\to E^*\\x_0\mapsto\varphi_{x_0}\end{cases}$

On dit que la forme bilinéaire φ est non dégénérée si $\tilde{\varphi}$ est injective

φ bilinéaire sur E On a équivalence entre

- φ non dégénérée
- $\forall x\in E$ $(\forall y\in E,\varphi(x,y)=0)\Rightarrow x=0_E$
- $\forall x\in E\setminus\{0_E\},\exists y\in E,\varphi(x,y)\neq 0$

Si on suppose E de dimension finie, φ non dégénérée, alors $\tilde{\varphi}$ est bijective de E dans E^*

$\Rightarrow\forall\psi\in E^*,\exists x_0\in E$ tel que $\psi=\varphi_{x_0}$

Un produit scalaire sur E est une application φ

- bilinéaire
- symétrique
- positive
- non dégénérée

φ forme bilinéaire symétrique et positive $\Rightarrow\varphi$ est non dégénérée *ssi* φ est définie positive

Preuve : $\Leftarrow\varphi(x_0,x_0)+def_+\to\ker\tilde{\varphi}=0_E$ $\Rightarrow f(t)=\varphi(tx_0+y,tx_0+y)\geq 0+bilin\to poly\deg 2\geq 0$

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive

On le note $\varphi(u,v)$ $(u|v)$ $<u|v>$ (u,v) $<u,v>$ ou $u.v$

φ sera désormais un produit scalaire sur E

La norme associée à φ est $\|.\|\begin{cases}E\to\mathbb{R}_+\\x\mapsto\sqrt{\varphi(x,x)}\end{cases}$

Identités de polarisation : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\varphi(x,y)$ $\quad \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\varphi(x,y)$

Identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Inégalité de Cauchy-Schwartz : $\forall (x,y) \in E^2 \quad |\varphi(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ $\quad$ Egalité *ssi* (x,y) liée

Preuve : $\varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0 \to p \quad y o \deg 2 \geq 0 \Rightarrow \Delta_0 \leq 0 \ldots$ $\quad$ Egalité $\Leftrightarrow \Delta_0 = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + y = 0_E$

Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$-\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

$-\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

$-\forall (x,y) \in E^2 \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

$\|.\|$ est une norme sur E

Preuve : 3^e point : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\varphi(x,y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$

Produit scalaire $\to$ Norme $\to$ Distance

MAIS certaines distances ne proviennent pas de norme et certaines normes de produit scalaire

Une norme provient d'un produit scalaire si $(x,y) \mapsto \frac{1}{4}(N(x+y)^2 - N(x-y)^2)$ est un produit scalaire

$(x,y) \in E^2 \quad x$ et y sont orthogonaux si $\varphi(x,y) = 0$

On dit qu'une famille $(x_y)_{x \in J} \in E^J$ est orthogonale si $\forall (i,j) \in J^2, \quad i \neq j \Rightarrow \varphi(x_i, x_j) = 0$

Théorème de Pythagore : $(x,y) \in E^2$ x et y sont orthogonaux *ssi* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$(x_1 \ldots x_n) \in E^n$ famille orthogonale $\Rightarrow \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2$

Preuve : Développer le produit scalaire (/!\ double somme), enlever les termes nuls (←orthogonalité)

Une famille orthogonale $(v_j)_{j \in J} \in E^J$ ne contenant pas le vecteur nul est libre

Preuve : $(j_1 \ldots j_n) \in J^n \quad 0 = \varphi(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_{j_k}, v_{j_l}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi(v_{j_k}, v_{j_l}) = \alpha_l \underbrace{\varphi(v_{j_l}, v_{j_l})}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_l = 0$

F et G sev de E sont orthogonaux si $\forall (x,y) \in F \times G, \quad \varphi(x,y) = 0$

2 sev orthogonaux sont en somme directe : $F \cap G = \{0_E\}$ $\quad$ On note $F \oplus G$ (ou $F \overset{\perp}{\oplus} G$)

F sev de E $\quad$ L'orthogonal de F : $F^\perp = \{v \in E, \forall u \in F, \varphi(u,v) = 0\} = \bigcap_{u \in F} \ker(\varphi_u)$

C'est un *sev* de E orthogonal à F $\quad F \subset (F^\perp)^\perp$

II. Espace vectoriel euclidien

Un espace vectoriel euclidien est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire

Dans cette partie, E sera un espace vectoriel euclidien, son produit scalaire sera noté φ ou $<.|.>$

$(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in E^n$ base de E est :

– orthogonale si la famille est orthogonale

– normée si $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \|v_j\|^2 = 1$

– orthonormée si elle est orthogonale et normée

$(v_j)_j \in E^n$ est normée si $\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad \varphi(v_j, v_k) = \delta_{jk}$

Si $\dim E = n \quad (v_1 ... v_n) \in (E \setminus \{0_E\})^n$ base orthogonale de E *ssi* famille orthogonale de E

$(e_1 ... e_n)$ base orthonormée de E : $\forall (u,v) \in E^2,\ v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,\ u = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j$

$$\forall j \in [\![1,n]\!], x_j = < v | e_j >$$

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j{}^2 = \sum_{j=1}^{n} < v | e_j >^2$$

$$< u | v > = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n} < u | e_j >< v | e_j >$$

Preuves : Développement par linéarité + orthogonalité

$\dim E = n \qquad F$ sev de E de dim $k \qquad \dim(F^{\perp}) = n - k$

Preuve : $F^{\perp} = \bigcap_{j=1}^{n} \ker(\varphi_{e_j}) \qquad + \qquad \tilde{\varphi}$ inj, $(e_1 ... e_k)$ libre $\Rightarrow (\tilde{\varphi}(e_1) ... \tilde{\varphi}(e_n))$ libre $\Leftrightarrow (\varphi_{e_1} ... \varphi_{e_k})$ libre

$\forall F$ sev de E, $\qquad F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E \qquad (F^{\perp})^{\perp} = F$

$(e_1 ... e_k)$ BO(N) de F, $(f_1 ... f_{n-k})$ de $F^{\perp} \Rightarrow (e_1 ... e_k, f_1 ... f_{n-k})$ BO(N) de E

E espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$ $\qquad E$ admet une base orthonormée

Preuve : Récurrence sur la dimension de E (utiliser l'orthogonal d'un sous-espace de dim n-1)

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : $(v_1 ... v_n)$ base de E

Il existe une base orthonormée $(e_1 ... e_n)$ de E telle que, $\forall k \in [\![1,n]\!],\ Vect(e_1 ... e_k) = Vect(v_1 ... v_k)$

Si de plus, $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \varphi(e_k, v_k) > 0$, cette base est unique

Preuve : Constructive : $e_1 = \pm v_1 / \|v_1\| \qquad w \in$ l'orth de F_k dans $F_{k+1} \qquad e_{k+1} = \pm w / \|w\| ...$

En pratique, pour trouver e_{k+1} : On cherche $w = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$

$$w \perp F_k \Rightarrow \forall l \in [\![1,k]\!],\ < w | e_l > = 0 \Rightarrow \beta_1 = < v_{k+1} | e_l >$$

E euclidien, F sev de E La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$

$$p\begin{cases} E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} \to E \\ u = v + w \mapsto v \end{cases}$$

$p(v)$ est l'unique vecteur tel que $(v - p(v)) \in F^{\perp}$

F sev de E $(e_1 \dots e_p)$ BON de F, $(e_{p+1} \dots e_n)$ de $F^{\perp}$ p proj $\perp$ sur F, q sur $F^{\perp}$

$$\forall v \in E \qquad p(v) = \sum_{j=1}^{p} < v \mid e_j > e_j \qquad q(v) = \sum_{j=p+1}^{n} < v \mid e_j > e_j$$

F sev de E. p proj $\perp$ sur F, q sur $F^{\perp}$ $dit(v,F) = \inf\{\|v-u\|, u \in F\} = \|v - p(v)\| = \|q(v)\|$

Si $(e_1 \dots e_p)$ BON de F, $d^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{p} < v \mid e_j >^2$

Preuve : $u \in F$ $\|v-u\|^2 = \| \underbrace{(u - p(v))}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{(p(v) - u)}_{\in F} \|^2 \geq \|v - p(v)\|^2$ $+ \leq$ car $p(v) \in F$

Si E de dimension infinie mais F de dim finie, on se restreint à $F + Vect(v)$

Exemples : $\varphi \begin{cases} (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \end{cases}$ produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

$\varphi \begin{cases} (\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt \end{cases}$ est un produit scalaire

$\varphi \begin{cases} (\mathbb{R}_n[X])^2 \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \begin{cases} P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \end{cases} \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \end{cases}$ $\varphi \begin{cases} (\mathbb{R}_n[X])^2 \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) \end{cases}$ sont des produits scalaires

III. Applications linéaires orthogonales

$(E, <\cdot|\cdot>)$ espace vectoriel euclidien

$f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale si elle préserve le produit scalaire : $\forall (u,v) \in E^2, < f(u) \mid f(v) > = < u \mid v >$

f est orthogonale *ssi* elle préserve la norme ($\forall v \in E, \|f(v)\| = \|v\|$) (à utiliser dans toutes les preuves)

$f \in \mathcal{F}(E,E)$ préserve le produit scalaire $\Rightarrow$ f est une application linéaire orthogonale

Preuve : Ecrire le produit scalaire $\|f(\alpha u + \beta v)\|^2$, tout développer, remplacer par (u,v), tout factoriser+def$_+$

Un projecteur orthogonal n'est pas une application linéaire orthogonale

$\mathcal{O}(E) = \{ f \in \mathcal{L}(E)$ orthogonale$\}$ $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous groupe de $(Gl(E), \circ)$

$f \in \mathcal{L}(E)$ On a équivalence entre :

- $f \in \mathcal{O}(E)$
- $\forall \mathcal{B}_0 = (e_1 \dots e_n)$ BON de E, $f(\mathcal{B}_0) = (f(e_1) \dots f(e_n))$ BON de E
- $\exists \mathcal{B}_0$ BON de E, $f(\mathcal{B}_0)$ BON de E

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}_0$ BON de E $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(f) = (C_1 \ldots C_n)$ On a équivalence entre :

- $f \in \mathcal{O}(E)$
- $(C_1 \ldots C_n)$ BON de $(\mathbb{R}^n, ps$ canonique$)$ $\Leftrightarrow$ $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^{\ 2},\ {}^tC_iC_j = \delta_{ij}$
- ${}^tAA = I_n$ $\Leftrightarrow$ $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ $A^{-1} = {}^tA$

Preuve : Utiliser $f(\mathcal{B}_0)$ BON de E, jouer sur les indices, montrer $= \delta_{kj}$ à chaque fois

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tMM = I_n\}$ $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$

$M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *ssi* $f \in \mathcal{O}(E)$

$f \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow |\det(f)| = 1$ $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow |\det(A)| = 1$ (utiliser ${}^tAA = I_n \Rightarrow \det(A)^2 = 1$)

P matrice de changement de $BON \Rightarrow P \in \mathcal{O}(n)$ ${}^tP = P^{-1}$

E est maintenant un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel

$\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ deux bases de E

On dit que $\mathcal{B}$ a la même orientation que $\mathcal{B}_0$ si $\det_{\mathcal{B}_0}(B) > 0$ C'est une relation d'équivalence

On a deux classes d'équivalence : Soit $\mathcal{B}_0$ fixée : $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{B} / \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0\}$ $\mathcal{C}_2 = \{\mathcal{B} / \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0\}$

$f \in Gl(E)$ Si $\det(f) > 0$, alors pour toute base $\mathcal{B}_0$, $\det_{\mathcal{B}_0}(f(\mathcal{B}_0)) = \det(f) > 0$

$\Rightarrow f(\mathcal{B}_0)$ a la même orientation que $\mathcal{B}_0$: f préserve l'orientation

E est à nouveau espace vectoriel euclidien

$SO(E) = \{f \in \mathcal{O}(E)$ préserve l'orientation$\} = \{f \in \mathcal{O}(E), \det(f) = 1\}$ est un sous groupe de $\mathcal{O}(E)$

$\mathcal{O}^{-1}(E) = \mathcal{O}(E) \setminus SO(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) / \det(f) = -1\}$

$SO(E)$ est un sous-groupe distingué : $\forall h \in \mathcal{O}(E),$ $h \circ SO(E) \circ h^{-1} = SO(E)$

Ecriture matricielle : $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 < X | Y >= {}^tXY$

$\mathcal{B} = (e_1 \ldots e_n)$ base quelconque $A = (< e_i | e_j >)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ $\forall X = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x),\ Y = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(y)$ $< x | y >= {}^tXAY$

$A = (< e_i | e_j >)_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^{\ 2}} \in \mathcal{S}_n$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], a_{kk} > 0$ $A = I_n$ *ssi* $\mathcal{B}$ BON

Théorème de représentation : (E, φ) eve $\Rightarrow \tilde{\varphi} \begin{cases} E \to E^* \\ x \mapsto \varphi_x \end{cases}$ est un isomorphisme

$\Rightarrow \forall \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*,$ $\exists ! x \in E, \psi = \varphi_x$

Représentation matricielle : $\mathcal{B}_0$ BON $\forall x \in E,\ X = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(x) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(\varphi_x) = {}^tX \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$

On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

IV. Où l'on rencontre pour la première fois les adjoints

Cette partie est au programme de spé

$(E,<\cdot|\cdot>)$ eve $\quad f\in\mathcal{L}(E)$ $\quad \exists!\, f^*\in\mathcal{F}(E,E)$ tq $\forall(x,y)\in E^2$ $\quad <f(x)|y>=<x|f^*(y)>$

De plus, $f^*\in\mathcal{L}(E)$ est appelée l'adjoint de f

Preuve : $\psi_y : x\mapsto <f(x)|y>$, thm représentation : $\exists! z_y\in E, \psi_y=\varphi_{z_y} \Rightarrow f^*(y)=z_y$ Mq lin en dvt

$\sigma\begin{cases}\mathcal{L}(E)\to\mathcal{L}(E)\\ f\quad\mapsto f^*\end{cases}$ est linéaire. $\forall f\in\mathcal{L}(E), (f^*)^*=f \quad \Rightarrow \sigma\in Gl(\mathcal{L}(E)), \sigma^2=Id_{\mathcal{L}(E)}$

Preuve : $<x|(\alpha f+\beta g)^*(y)>=<(\alpha f+\beta g)(x)|y>$ Développement + * + factorisation + unicité

$(E,<\cdot|\cdot>)$ euclidien, $\mathcal{B}_0$ BON $\quad \forall f\in\mathcal{L}(E), A=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(f), B=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(f^*)$ $\qquad A={}^tB$

Preuve : $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n{}^2, a_{ij}=<f(e_j)|e_i>$ $\qquad b_{ij}=<f^*(e_j)|e_i>=<e_j|f(e_i)>=a_{ji}$

$\forall(f,g)\in\mathcal{L}(E), (f\circ g)^*=g^*\circ f^*$

$f\in\mathcal{L}(E)$ $\qquad f\in\mathcal{O}(E)$ ssi $f^*\circ f=f\circ f^*=Id_E$

Preuve : $f\in\mathcal{O}(E)\Leftrightarrow <x|f^*\circ f(y)>=<x|y>\Leftrightarrow f^*\circ f(y)=y$ par non dégénérescence du ps

$s\in\mathcal{L}(E)$ symétrie ($s\circ s=Id_E$). On a équivalence entre :

- $s\in\mathcal{O}(E)$
- s symétrie orthogonale
- $s^*=s$

Preuve : f sym $\perp$: $\|s(u)\|^2=\|u\|^2$ $\qquad s\in\mathcal{O}(E)\Rightarrow \|s(\underbrace{x}_{\in F}+\underbrace{y}_{\in G})\|^2=\|x+y\|^2\Rightarrow <x|y>=0$ (Id.parall)+dim

$(E,<\cdot|\cdot>)$ eve $\quad f\in\mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $f^*=f$ $\quad$ càd $\quad \forall(x,y)\in E^2, <f(x)|y>=<x|f(y)>$

$\mathcal{B}_0$ BON, $f\in\mathcal{L}(E)$ autoadjoint ssi $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(f)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$p\in\mathcal{L}(E)$ projecteur ($p\circ p=p$). On a équivalence entre :

- p projecteur orthogonal
- $\forall x\in E, \|p(x)\|\le\|x\|$
- $p^*=p$

Preuve : $(ii)\Rightarrow(i)\, u=tx+y, \|p(u)\|\le\|u\|\Leftrightarrow \|tx\|^2\le\|tx\|^2+\|y\|^2+2t<x|y>\Rightarrow 2t\underbrace{<x|y>}_{\Rightarrow=0}+\|y\|^2\ge 0$

E eve, $f\in\mathcal{L}(E)$ $\qquad \ker(f^*)=(\operatorname{Im} f)^\perp$ $\qquad \operatorname{Im}(f^*)=(\ker f)^\perp$

E eve, $f\in\mathcal{L}(E)$ $\qquad F$ sev de E stable par $f\Rightarrow F^\perp$ est stable par f^* $\qquad$ Si $f\in\mathcal{O}(E)$, $F^\perp$ est stable par f

V. Dimension 2 (retour au programme de sup')

E est un espace vectoriel euclidien de dimension 2, $\mathcal{B}_0=(e_1,e_2)$ BON de E (fixant l'orientation)

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M=\begin{pmatrix} a & -\varepsilon c \\ c & \varepsilon a \end{pmatrix} \quad (\varepsilon\in\{-1,+1\}, a^2+b^2=1)$$

$$\Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R} / M=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\varepsilon\in\{-1,+1\})$$

Preuve : ${}^tMM=I_n \Leftrightarrow ad-bc=\varepsilon\in\{-1,+1\}, {}^tM=M^{-1}=\dfrac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$...

$SO_2(\mathbb{R})=\left\{R_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\theta\in\mathbb{R}\right\}$ $\qquad$ $O_2^-(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\theta\in\mathbb{R}\right\}$

$\mathcal{R}\begin{cases} (\mathbb{R},+)\to(SO_2(\mathbb{R}),\times) \\ \theta \quad\mapsto R_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{cases}$ est un morphisme de groupe surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$

$(SO_2(\mathbb{R}),\times)$ est commutatif $\qquad$ R_θ est la matrice de rotation d'angle θ

$r\in SO(E)\Rightarrow\exists\theta\in\mathbb{R} / \forall\mathcal{B}$ BON directe de E, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(r)=R_\theta$ $\quad$ r est appelée rotation d'angle θ (unique mod 2π)

$s\in\mathcal{O}^-(E), S_0=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(s)\in\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ $\qquad$ $S_0=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$S_0^{\ 2}=I_2\Rightarrow$ C'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D (donc une réflexion)

Preuve : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in D\Leftrightarrow S_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow(\cos\theta-1)x+\sin\theta y=0$...+ trigo

$sym/\{0_E\}: r_\pi\in SO(E)$ $\qquad$ $sym/E: Id_E\in SO(E)$

Pour tout $r\in SO(E), s\in\mathcal{O}^-(E)$ $\qquad$ $s\circ r\circ s^{-1}=s\circ r\circ s=r^{-1}$

$\forall\mathcal{B}$ BON indirecte de E, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(r)=R_{-\theta}$

$\mathcal{O}(E)$ n'est pas commutatif

$u_0\in E, \|u_0\|=1$ $\qquad$ $\varphi_{u_0}\begin{cases} SO(E) & \to\mathbb{U}=\{v\in E,\|v\|=1\} \\ r_\theta & \mapsto r_\theta(u_0) \end{cases}$ est une bijection de $SO(E)$ dans $\mathbb{U}$

$(u_0,v)\in E^2, \|u_0\|=\|v\|=1$ $\qquad$ L'angle (u_0,v) est l'unique θ mod 2π tel que $v=r_\theta(u_0)$

$\forall(u,v)\in(E\setminus\{0_E\})^2$, l'angle $(u,v)=\left(\dfrac{u}{\|u\|},\dfrac{v}{\|v\|}\right)\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$\forall(u,v,x)\in(E\setminus\{0_E\})^3$ $\qquad$ $(u,u)\equiv0[2\pi]$ $\quad$ $(u,v)+(v,w)\equiv(u,w)[2\pi]$ $\quad$ $(v,u)\equiv-(u,v)[2\pi]$

L'angle entre deux droite est l'angle entre leurs vecteurs directeurs respectifs (mod π)

D_1 et D_2 2 droites de E, s_{D_i} est la réflexion p/r D_i $\qquad$ $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est la rotation d'angle $2\theta = 2(\widehat{D_1, D_2})$

Preuve : $r_\theta \circ r_{D_1} \circ r_{-\theta}(v) = v \Leftrightarrow s_{D_1}(r_{-\theta}(v)) = r_{-\theta}(v) \Leftrightarrow r_{-\theta}(v) \in D_1 \Leftrightarrow v \in D_2 \Rightarrow s_{D_2} \circ s_{D_1} = r_\theta \circ \underbrace{s_{D_1} \circ r_{-\theta} \circ s_{D_1}}_{r_\theta}$

Les réflexions engendrent $\mathcal{O}(E)$

VI. Dimension 3

E sera un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ BON de E (fixant l'orientation)

$r \in SO(E) \setminus \{Id_E\}$ $\qquad$ $D = \ker(r - Id_E)$ est de dimension 1 : c'est l'axe de r

Preuve : Mq $\ker(r - Id_E) \neq 0_E$: P_A poly caractéristique de $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(r)$ $\deg 3 \Rightarrow 1$ racine réelle λ min

r préserve la norme $\Rightarrow |\lambda| = 1$ $\quad$ Si $\lambda = -1 : G = \ker(r + Id_E)$ $\quad$ $\dim G = 3$ impossible : $(-Id_E) \in \mathcal{O}^-(E)$

$\dim G = 2 \Rightarrow G^\perp = vect(v_1)$ stable par $r, v_1 \notin G \Rightarrow r(v_1) = v_1$

$\dim G = 1 \Rightarrow r_{\backslash G^\perp}$ réflexion $\Rightarrow w \in G^\perp \setminus \{0_E\}, r(w) = w$ (on est en vrai dans le 2e cas)

$\dim(\ker(r - Id_E)) \neq 3$ $(r \neq Id_E)$, $\dim G \neq 2$ par l'absurde, $r(w_3) = -w_3 \Rightarrow$ une BON où $Mat(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Une fois w_1 fixé, l'orientation de $F = D^\perp$ est définie par $w_1 \Rightarrow \theta$ indépendant de (w_2, w_3) BON directe
Mais si on prend $-w_1$, on doit considérer $(-w_1, w_3, w_2)$ pour avoir une BON directe $\Rightarrow \theta$ remplacé par $-\theta$

$r \in SO(E)\{Id_E\}$ $\qquad$ $D = Vect(w_1) = \ker(r - Id_E)$

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique $\mod 2\pi$) tel que pour tout $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ BON directe, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$

Si on veut $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(r)$, on écrit P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, et $P^{-1} = {}^tP$

$r \in SO(E)$ rotation d'axe $\mathbb{R}w_1$ ($\|w_1\| = 1$) et d'angle θ : $\forall v \in E, r(v) = (1 - \cos\theta)(v \mid w_1)w_1 + \cos\theta v + \sin\theta(w_1 \wedge v)$

Pour identifier un élément de $SO(E)$ de matrice dans $\mathcal{B}_0$ A :

- on vérifie $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$: ${}^tAA = I_3$ ou (C_1, C_2, C_3) BON de $\mathbb{R}_3$
- on vérifie $A \in SO_3(\mathbb{R})$: $\det(A) = 1$ ou $C_1 \wedge C_2 = C_3$ ($-C_3$ si $A \in \mathcal{O}^-(\mathbb{R})$) (une coord non nulle suffit)
- si ${}^tA = A$, f est une symétrie orthogonale p/r à une droite D
- sinon, on cherche l'axe de rotation en résolvant $AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_E$
- on détermine $|\theta|$ en utilisant $\operatorname{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$
- on détermine le signe de θ avec $(r(v) | < w_1 \wedge v >)$ $(v \in E)$

$A \in \mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$ $\qquad$ si ${}^tA = A \Rightarrow A = -I_3$ ou f est une réflexion $\Rightarrow$ on trouve P en résolvant $AX = X$
sinon, $-A = R$ est la matrice d'une rotation. f est la composée d'une rotation et de la sym centrale

P_1 et P_2 deux plans, $P_1 \cap P_2 = \mathbb{R}w_1$ $\qquad$ θ l'angle entre P_1 et P_2 (mesuré dans $(\mathbb{R}w_1)^\perp$, mod π)
$\Rightarrow s_{P_2} \circ s_{P_1}$ est la rotation d'axe $\mathbb{R}w_1$ et d'angle 2θ (mod 2π)

Les réflexions engendrent $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$