Chap 26 : Séries et intégrales généralisées

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Séries

Une série de terme général u_n est la donnée d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On la note Σu_n

Les sommes partielles de la série sont $S_n=\sum_{r=0}^{n}u_r \qquad (n\in\mathbb{N})$

On dit que la série Σu_n converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

On note $S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}S_n$ la somme de la série, et $R_n=S-S_n=\sum_{r=n+1}^{+\infty}u_r$ les restes de la série

Si on change un nombre fini de termes, on ne change pas la nature de la série

Supposons $(u_n)\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}} \quad \Rightarrow \quad S_{n+1}-S_n=u_{n+1}\geq 0 \quad (S_n)_n$ est donc croissante

Théorème de convergence : On considère Σu_n à termes positifs

– Soit les sommes partielles sont majorées, alors la série converge

– Soit $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$

Séries de Riemann : $\sum\frac{1}{n^\alpha}\quad\begin{cases}\text{converge si } \alpha>1\\ \text{diverge si } \alpha\leq 1\end{cases}$

Preuve : On travaille par inégalités avec l'intégrale correspondante (sur [n, n+1])

Séries de Bertrand : $\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge *ssi* $\begin{cases}\alpha>1\\ \text{ou}\\ \alpha=1,\beta>1\end{cases}$

Preuve : Pour $\alpha\neq 1$, on se ramène à des O avec des séries de Riemann (pour majorer ou minorer)
Pour $\alpha=1$, on compare à l'intégrale (voir Bertrand) (on trouve du ln(ln(x)) si $\beta=1$)

Théorème de comparaison : $(u_n)_n$ et $(v_n)\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

– $\forall n\geq N, u_n\leq v_n$ et Σv_n converge $\quad\Rightarrow\Sigma u_n$ converge

– $u_n=\mathcal{O}_{n\to+\infty}(v_n)$ et Σv_n converge $\quad\Rightarrow\Sigma u_n$ converge

– $u_n=o_{n\to+\infty}(v_n)$ et Σv_n converge $\quad\Rightarrow\Sigma u_n$ converge

– $u_n\sim_{n\to+\infty}v_n \quad\Rightarrow\quad \Sigma v_n$ converge *ssi* Σu_n converge

Preuve : séparer la somme en 2 (avant et après N), majorer

Théorème de comparaison des restes et sommes partielles : $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

$$(i)\ \begin{cases} u_n = o(v_n) \quad (resp\ \mathcal{O}(v_n)) \\ \Sigma u_n \text{ diverge (d'où } \Sigma v_n \text{ aussi)} \\ S_n \text{ sont les sommes partielles de } u_n, \tilde{S}_n \text{ celles de } v_n \end{cases} \Rightarrow S_n = o_{n\to\infty}(\tilde{S}_n) \quad (resp\ \mathcal{O}_{n\to\infty}(\tilde{S}_n))$$

$$(ii)\ \begin{cases} u_n = o(v_n) \quad (resp\ \mathcal{O}(v_n)) \\ \Sigma v_n \text{ converge (d'où } \Sigma u_n \text{ aussi)} \\ R_n \text{ sont les restes de } u_n, \tilde{R}_n \text{ ceux de } v_n \end{cases} \Rightarrow R_n = o_{n\to\infty}(\tilde{R}_n) \quad (resp\ \mathcal{O}_{n\to\infty}(\tilde{R}_n))$$

$$u_n, v_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}} \quad u_n \sim v_n \Rightarrow \begin{cases} \Sigma u_n \text{ diverge} \Rightarrow S_n \sim \tilde{S}_n \\ \Sigma u_n \text{ converge} \Rightarrow R_n \sim \tilde{R}_n \end{cases}$$

$u_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}} \quad \Sigma u_n$ converge $\Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} l - l = 0$ LA RECIPROQUE EST FAUSSE

Idée générale pour l'étude d'une série de terme général positif : on cherche un équivalent / maj / min de type série de Riemann / Bertrand

Ce qui précède n'est valable que pour les séries de terme général POSITIF

II. Séries de terme général quelconque

$(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ La suite Σu_n converge ssi la suite $(S_n)_n$ converge

Pas d'équivalence avec $(S_n)_n$ majorée

Σu_n converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ LA RECIPROQUE EST FAUSSE

Σu_n converge *ssi* (S_n) est de Cauchy *ssi* $\left(\forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall p \geq q \geq N, \quad \left|\sum\limits_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leq \varepsilon\right)$

$(u_n) \in \mathbb{K}^n \quad \Sigma u_n$ est absolument convergente si $\Sigma |u_n|$ converge

Σu_n absolument convergente $\Rightarrow \Sigma u_n$ convergente (Mq de Cauchy) LA RECIPROQUE EST FAUSSE

Théorème des séries alternées : $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n u_n, \text{ avec : } \begin{cases} u_n \geq 0 \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ (u_n)_n \text{ est décroissante} \end{cases}\right) \Rightarrow \Sigma v_n \text{ converge}$$

Preuve : Mq $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes

$S_n - S$ a le signe de $(-1)^n : S_{2n} \geq S,\ S_{2n+1} \leq S \qquad |S - S_n| \leq u_{n+1} = |v_{n+1}|$

$\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que Σu_n converge$\}$ est un *sev* de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

/!\ PAS UNE ALGEBRE : $\Sigma u_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV mais pas $\Sigma u_n{}^2 = \sum \frac{1}{n}$

III. Intégrales généralisées (ou impropres)

I est un intervalle quelconque : $I=[a,b]$, $[a,b[$ $_{(b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\})}$, $]a,b]$ $_{(a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\})}$ ou $]a,b[$ $_{((a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2)}$

$I=[a,b[$ $\quad f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}_+)$ On a équivalence entre :

(i) $F_0\begin{cases} I\to\mathbb{R}_+ \\ x\mapsto\int_a^x f(t)dt\end{cases}$ a une limite finie quand $x\to b$

(ii) F_0 est majorée sur I

(iii) $\forall F$ primitive de f, F admet une limite finie quand $x\to b$

(iv) $\forall (b_n)_n\in I^{\mathbb{N}}$, $b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}b \quad\Rightarrow\quad \left(\int_a^{b_n}f(t)dt\right)_n$ admet une limite finie

(v) $\exists (b_n)_n\in I^{\mathbb{N}}$, $b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}b$ et $\left(\int_a^{b_n}f(t)dt\right)_n$ admet une limite finie

Dans ce cas, on dit que f est intégrable sur I (l'intégrale converge), et on pose $\int_a^b f(t)dt=\lim\limits_{x\to a}\int_a^x f(t)dt$

Preuve : $(v)\Rightarrow(i)$: utiliser la croissance de F pour majorer

$\forall x\in]a,b[$, $\int_a^x f(t)dt$ est appelée intégrale partielle (que f soit intégrable sur I ou non)

Si l'intégrale converge, $\int_x^b f(t)dt=\lim\limits_{y\to b}\int_x^y f(t)dt$ est appelée reste de l'intégrale

Théorème de comparaison : $I=[a,b[$ f et $g\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}_+)$

- $\forall x\in[c,b[$ $(c\in[a,b[)$, $f(x)\le g(x)$ et $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow\int_a^b f(t)dt$ converge
- $f(x)=\mathcal{O}_{x\to b}(g(x))$ et $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow\int_a^b f(t)dt$ converge
- $f(x)=o_{x\to b}(g(x))$ et $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow\int_a^b f(t)dt$ converge
- $f(x)\sim_{x\to b} g(x)\Rightarrow$ $\int_a^b g(t)dt$ converge *ssi* $\int_a^b f(t)dt$ converge

Tout ce qui précède sur $I=[a,b[$ s'adapte de manière immédiate sur $I=]a,b]$

Pour $I=]a,b[$, on prend $c\in]a,b[$ et on s'intéresse d'un côté à $]a,c]$ et de l'autre à $[c,b[$

Intégrales de Riemann : $\begin{cases}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\text{ converge } ssi\ \alpha>1\\ \int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}\text{ converge } ssi\ \alpha<1\end{cases}$

Intégrales de Bertrand : $\begin{cases}\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\text{ converge } ssi\ \alpha>1\text{ ou }\alpha=1\text{ et }\beta>1\\ \int_0^{1/2}\frac{dx}{x^\alpha|\ln x|^\beta}\text{ converge } ssi\ \alpha<1\text{ ou }\alpha=1\text{ et }\beta>1\end{cases}$

Preuves : Riemann : regarder la limite de l'intégrale $\quad$ Bertrand : se ramener à Riemann ou intégrer

Si $\alpha<0$ $\quad\int_0^{+\infty}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{|\alpha|}$ $\qquad$ Si $\alpha>0$ $\quad\int_{-\infty}^0 e^{\alpha x}dx=\frac{1}{|\alpha|}$

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{C}$) I intervalle quelconque On dit que f est intégrable sur I si $\int_I |f|$ converge

$I = [a,b[$ $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{C}$) intégrable $\Rightarrow F_0 \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt \end{cases}$ admet une limite $\int_a^b f(t)dt$ quand $x \to b$

Si $\int_a^b |f(t)|dt$ diverge, f n'est pas intégrable sur I, mais si F_0 admet quand même une limite en b, on dit que f est pseudo intégrable sur I

$\int_1^{+\infty} f(t)dt$ CV $\not\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

IV. Comparaison série / intégrale

$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+) \\ f \text{ décroissante} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\sum_{n\geq a} f(n)$ converge *ssi* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge

Preuve : $\forall t \in [n,n+1],\ f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \Rightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n) +$ Sommation $\Rightarrow$ majorations