Chap 25 : Systèmes linéaires

I. Introduction et vocabulaire

Système linéaire à p inconnues : donnée de $(a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]}\in\mathbb{K}^{n\times p}$ et de $\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$

On écrit : $\mathcal{S}\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1p}x_p=b_1\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{np}x_p=b_n\end{cases}$ où les $(x_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ sont les inconnues du système

Une solution du système est $(x_1...x_p)\in\mathbb{K}^p$ telle que les n équations de $\mathcal{S}$ soient vérifiées

On notera : $\mathfrak{S}$ l'ensemble des solutions

$\mathcal{S}_0$ le système homogène associé

$\mathfrak{S}_0$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}_0$

Ecriture matricielle : $A=(a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]}\in\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ $B=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n\simeq\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$

Inconnue : $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$

$\mathcal{S}$ se réécrit : $AX=B$

Interprétation vectorielle : $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$ E de dim p et base $\mathcal{B}$, F de dim n et base $\mathcal{C}$

$A=\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$ $b\in F, B=\mathfrak{Mat}_{\mathcal{C}}(b)$

Chercher $X\in\mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{K})$ tq $AX=B$ revient à chercher $x\in E$ tel que $\varphi(x)=b$

Autre interprétation : $A=\mathfrak{Mat}_{\mathcal{C}}(v_1...v_p)\in\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ $(x_1...x_p)\in\mathbb{K}^p$ est solution de $\mathcal{S}$ *ssi* $b=\sum_{j=1}^{p}x_jv_j$

On appelle rang de $\mathcal{S}$: $rg(\mathcal{S})=\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(\varphi)$

II. Ensemble des solutions

$\mathcal{S}$ a au moins une solution *ssi* $b\in\operatorname{Im}\varphi$ *ssi* $b\in Vect(v_1...v_p)$

Si $\mathrm{rg}(\mathcal{S})=n$, pour tout $B\in\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}$ a au moins une solution

$\mathfrak{S}_0$ est un $\mathbb{K}-ev$ de dimension $p-\mathrm{rg}(S)$ $(X\in\mathcal{S}_0\Leftrightarrow x\in\ker\varphi)$

Si $\mathrm{rg}(\mathcal{S})=p$, $\mathcal{S}_0=\{(0,0,...,0)\}$

Si $\mathbb{S} \neq 0$ et $Y \in \mathbb{S}$, alors $\mathbb{S} = Y + \mathbb{S}_0 = \{Y + X_0, \quad X_0 \in \mathbb{S}_0\}$

Si $b \in \operatorname{Im}\varphi, \mathbb{S} \neq \varnothing$ est un espace affine de dimension $p - \operatorname{rg}(\mathcal{S})$
Si $b \notin \operatorname{Im}\varphi$, $\mathbb{S} = \varnothing$

On dit que $\mathcal{S}$ est un système de Cramer si $\operatorname{rg}(\mathcal{S}) = n = p$

Formules de Cramer : $AX = B$, avec $A = (C_1 ... C_p)$ Posons $x_j = \frac{1}{\det(A)} \det(C_1 ... C_{j-1}, B, C_{j+1} ... C_p)$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est l'unique solution de $\mathcal{S}$

Preuve : $\det(C_1 ... C_{j-1}, B, C_{j+1} ... C_n) = \det(C_1 ... C_{j-1}, \sum x_k C_k, C_{j+1} ... C_n) = x_j \det(A)$ (antisymétrie)

III. Méthode de résolution : pivot de Gauss

On réalise un pivot de Gauss pour trouver le rang du système et les solutions éventuelles.
Pour les solutions, on ne manipule **que les lignes** (sauf changement d'ordre des colonnes)

On utilise la matrice augmentée du système : $(A | B) = (C_1 ... C_p | B) \in \mathcal{M}_{n(p+1)}(\mathbb{K})$

On se ramène à une matrice "triangulaire" par le pivot de Gauss : $\left(\begin{array}{ccc:c|c} a_1 & * & * & * & \\ & \ddots & * & * & \\ 0 & & a_{r_1} & * & \widetilde{B} \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{array}\right)$ avec $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{b_1} \\ \vdots \\ \widetilde{b_n} \end{pmatrix}$

CNS pour avoir des solutions : $\forall j \in [\![r+1, n]\!], \widetilde{b_j} = 0$

Soit $(\widetilde{\mathcal{S}})$ le système dont la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc:c|c} a_1 & * & * & * & \widetilde{b_1} \\ & \ddots & * & * & \vdots \\ 0 & & a_r & * & \widetilde{b_r} \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Quels que soient $(x_r ... x_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$ fixés, $(\widetilde{\mathcal{S}})$ a une unique solution $(x_1 ... x_p)$