Chap 22 : Matrices

Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif), $n, p \in \mathbb{N}^*$

I. Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \{(a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^{np}\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(p-1)} & a_{np} \end{pmatrix}$$

$j \in [\![1,p]\!]$ $C_j = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ la $j^{ième}$ colonne de A

$i \in [\![1,n]\!]$ $L_i = (a_{ij})_{j\in[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{1\,p}(\mathbb{K})$ la $i^{ième}$ ligne de A

$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}-ev$: $A = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $B = (b_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha A = (\alpha a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$

Un vecteur colonne est une matrice $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ On l'identifie à un élément de $\mathbb{K}^n$

$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ $(e_1 \dots e_p)$ base canonique de $\mathbb{K}^p$, $(f_1 \dots f_n)$ celle de $\mathbb{K}^n$ $\forall j \in [\![1,p]\!], \varphi(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$

La matrice de φ $\mathcal{M}at(\varphi) = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} =$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Coord. selon } f_1 \\ \\ \text{Coord. selon } f_n \end{array} \\ \varphi(e_1) \quad\quad \varphi(e_p) & \end{array}$$

$$\theta \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \to \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ \varphi \mapsto \mathcal{M}at(\varphi) = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,p]\!]} \end{cases}$$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-ev$

$A = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{i,j\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ $C = A \times B \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ est défini par :

$C = (c_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}$ tel que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n), \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ $\mathcal{M}at(\varphi \circ \psi) = \mathcal{M}at(\varphi) \times \mathcal{M}at(\psi)$

On écrit les matrices ainsi $\begin{matrix} & (B) \\ (A) & (C) \end{matrix}$, et on fait le produit des éléments de la colonne de B par ceux de la ligne de A qui correspond à la position du c_{ij} :

Associativité et "Distributivité" $(A,B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2$ $(C,D) \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})^2$ $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ $F \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$

$(A \times C) \times F = A \times (C \times F)$ $(\alpha A + \beta B) \times C = \alpha A \times C + \beta B \times C$ $A \times (\alpha C + \beta D) = \alpha A \times C + \beta A \times D$

$I_n = (\delta_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}at(Id_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$

$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ $I_n \times A = A$ $B \times I_n = B$

On n'a en général pas commutativité

$\forall(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ On définit $E_{kl}\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ par : $E_{kl}=(\delta_{ki}\delta_{lj})_{ij}$

$(E_{kl})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ $\qquad A=(a_{ij})_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}E_{ij}$

$A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\quad A=(C_1.\ C_p)=\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{pmatrix}$ $\qquad (E_{ij})_{ij}$ base canonique de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}),(\widetilde{E_{kl}})_{kl}$ celle de $\mathcal{M}_{pp}(\mathbb{K})$

$E_{ij}\times A=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ L_j\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow i^{\text{ème}}$ position $\qquad A\times\widetilde{E_{kl}}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \underset{}{\overset{l^{\text{ème}}\text{ position}}{\overset{\downarrow}{C_k}}} & \cdots & 0\end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)=(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre non commutative (si $n>1$), d'élément neutre pour la lci$\times$ I_n et de dimension n^2

$\theta\begin{cases}(\mathcal{L}(\mathbb{K}^n),+,\circ,\cdot) & \to(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)\\ \varphi & \mapsto\mathcal{M}at(\varphi)\end{cases}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$algèbres

$\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n),A=\mathcal{M}at(\varphi)\quad v\in\mathbb{K}^p,v=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^p\simeq\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})\qquad \varphi(v)=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$

II. Matrices et applications linéaires

E $\mathbb{K}-ev$ de dim finie n $\qquad \mathcal{B}=(e_1...e_n)$ base de E

$\varphi^{-1}\begin{cases}E & \to\mathbb{K}^n\simeq\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\\ v & \mapsto\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\text{ tel que } v=\sum_{j=1}^{n}x_je_j\end{cases}$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n\simeq\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\varphi^{-1}(v)\qquad (v_1...v_p)\in E^p,\forall j\in[\![1,p]\!]C_j=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_j)\qquad \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_1...v_p)=(C_1...C_p)$

$\begin{cases}E^p & \to\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\\ (v_1...v_p) & \mapsto\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_1...v_p)\end{cases}$ est un isomorphisme de E^p dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

E et F deux $\mathbb{K}-ev$ de dim finie. $\mathcal{B}=(e_1...e_p)$ base de E, $\mathcal{C}=(f_1...f_n)$ base de F $\qquad \varphi\in\mathcal{L}(E,F)$

$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)=\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi(e_1)...\varphi(e_p))=A=(a_{ij})_{ij}\qquad \forall j\in[\![1,p]\!],\ \varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i$

$\theta\begin{cases}\mathcal{L}(E,F)\to\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\\ \varphi\qquad\mapsto\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathbb{K})\end{cases}$ est un isomorphisme

E,F,G $\mathbb{K}-ev$ de dim finies $q,p,n\qquad \varphi\in\mathcal{L}(E,F),\psi\in\mathcal{L}(F,G)\qquad \mathcal{B}_0$ base de G, $\mathcal{B}$ de F, $\mathcal{C}$ de E

$A=\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(\psi)\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\qquad B=\mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi)\in\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})\qquad C=\mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0}(\psi\circ\varphi)=A\times B$

$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi)=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n = BA$ On note $B = A^{-1}$

E, F $\mathbb{K}-ev$ de dim n. $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{C}$ de F. $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$

A est inversible *ssi* φ est un isomorphisme de E dans F $A^{-1} = \mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi^{-1})$

E $\mathbb{K}-ev$ de dim finie n et de base $\mathcal{B}$ $(v_1 ... v_n) \in E^n$ $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_1 ... v_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A est inversible *ssi* $(v_1 ... v_n)$ base de E

$Gl_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \text{ inversible}\}$ $(Gl_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe

Pour tout E $\mathbb{K}-ev$ de dim n et $\mathcal{B}$ base de E, $\xi \begin{cases} (Gl(E), \circ) \to (Gl_n(\mathbb{K}), \times) \\ \varphi \quad \mapsto \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{cases}$ est un isomorphisme de groupes

III. Sous ensembles particuliers de Mn($\mathbb{K}$)

Un matrice $A = (a_{i\,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\lambda_i = a_{i\,i}$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ On note alors $A = diag(\lambda_1 ... \lambda_n)$

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \text{ diagonale}\}$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si $A = diag(\lambda_1 ... \lambda_n)$ et $B = diag(\mu_1 ... \mu_n)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

$A + B = diag(\lambda_1 + \mu_1 ... \lambda_n + \mu_n)$ $\alpha A = diag(\alpha\lambda_1 ... \alpha\lambda_n)$ $AB = diag(\lambda_1\mu_1 ... \lambda_n\mu_n)$

$A = diag(\lambda_1 ... \lambda_n)$ A est inversible *ssi* pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_j \neq 0$ $A^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_1} ... \frac{1}{\lambda_n}\right)$

d mi$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$ Base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) : (E_{i\,i})_{i \in [\![1,n]\!]}$

$(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ $\mathbb{K}-$algèbre $\mathcal{B}$ sous algèbre de dim finie sur $\mathbb{K}$ Si $x \in \mathcal{B}$ est inversible dans $\mathcal{A}$, alors $x^{-1} \in \mathcal{B}$

Preuve : Utiliser $\eta \begin{cases} \mathcal{B} \to \mathcal{B} \\ y \mapsto xy \end{cases} \in \mathcal{L}(B)$ avec x inversible Montrer injectivité $\Rightarrow$ surjectivité $\Rightarrow \eta^{-1}(1) \in \mathcal{B}$

$(A, +, \times, \cdot)$ $\mathbb{K}-$algèbre de dim finie A intègre $\Rightarrow$ A corps

$\times$ est commutative sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

$A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ A est :

- triangulaire supérieure ($\in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$) si : $\forall (i,j) \in t[\![1,n]\!]^2$, $i > j \Rightarrow a_{i\,j} = 0$
- triangulaire inférieure ($\in \mathcal{T}_n^i(\mathbb{K})$) si : $\forall (i,j) \in t[\![1,n]\!]^2$, $i < j \Rightarrow a_{i\,j} = 0$
- triangulaire supérieure strictement ($\in \mathcal{T}_n^{ss}(\mathbb{K})$) si $\forall (i,j) \in t[\![1,n]\!]^2$, $i \geq j \Rightarrow a_{i\,j} = 0$
- triangulaire inférieure strictement ($\in \mathcal{T}_n^{is}(\mathbb{K})$) si $\forall (i,j) \in t[\![1,n]\!]^2$, $i \leq j \Rightarrow a_{i\,j} = 0$

$\mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Aet $B \in \mathcal{T}_n^s$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$

$A \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ A est inversible *ssi* pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $a_{jj} \neq 0$ $A^{-1} \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ $(A^{-1})_{jj} = \dfrac{1}{a_{jj}}$

Base de $\mathcal{T}_n^s : (E_{ij})_{i \le j}$ Base de $\mathcal{T}_n^i : (E_{ij})_{i \ge j} \Rightarrow \dim \mathcal{T}_n^s = \dim \mathcal{T}_n^i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Base de $\mathcal{T}_n^{ss} : (E_{ij})_{i < j}$ Base de $\mathcal{T}_n^{is} : (E_{ij})_{i > j} \Rightarrow \dim \mathcal{T}_n^{ss} = \dim \mathcal{T}_n^{is} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$A \in \mathcal{T}_n^{ss}(\mathbb{K}) \Rightarrow A^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

Transposée sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: $\tau_{np} \begin{cases} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A \mapsto {}^tA = (b_{ij})_{ij} \text{ tq } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ b_{ij} = a_{ji} \end{cases}$

La transposée est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, et $(\tau_{np})^{-1} = \tau_{pn}$, càd ${}^t({}^tA) = A$

$\tau_{nn} \in Gl(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}))$ $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}),\ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

On vérifie par la transposée que toutes les propriétés montrées pour $\mathcal{T}_n^s$ et $\mathcal{T}_n^{ss}$ sont valables pour $\mathcal{T}_n^i$ et $\mathcal{T}_n^{is}$

$\forall \in Gl_n(\mathbb{K})$ $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si ${}^tA = A$, et antisymétrique si ${}^tA = -A$

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tA = A\}$ $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tA = -A\}$

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Preuve : $A = \dfrac{A + {}^tA}{2} + \dfrac{A - {}^tA}{2}$: partie symétrique / antisymétrique

Si A est antisymétrique, alors $\forall j \in [\![1,n]\!], a_{jj} = 0$

De manière générale, pour $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $AB \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

Base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) : \{E_{jj}, j \in [\![1,n]\!]\} \cup \{(E_{ij} + E_{ji}), i < j\}$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) : \{(E_{ij} + E_{ji}), i < j\}$

$\mathcal{T}_n^s(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^{is}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

E $\mathbb{K}-ev$ de dimension p $\mathcal{B} = (e_1 \ldots e_p)$ base de E

$\theta \begin{cases} E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{1p}(\mathbb{K}) \\ \varphi \mapsto \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_1) \ldots \varphi(e_p)) \end{cases}$ est un isomorphisme

Les matrices lignes représentent les familles linéaires

IV. Matrices de changement de bases

E $\mathbb{K}-ev$ de dimension n $\mathcal{B}_0 = (e_1 \ldots e_n)$ et $\mathcal{B} = (w_1 \ldots w_n)$ bases de E

La matrice de changement de base de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est $P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(w_1 \ldots w_n) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$

$P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$ où φ est l'unique application linéaire qui envoie $\mathcal{B}_0$ sur $\mathcal{B}$

$P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}(Id_E) \in Gl_n(\mathbb{K})$

P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ $\quad v \in E \quad X_0 = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(v) \;\; X = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v) \qquad X_0 = PX$

P^{-1} est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$

E et F deux $\mathbb{K}-ev$ de dim finies p et n $\qquad \mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ bases de E, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}$ bases de F

$P \in Gl_p(\mathbb{K})$ matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, et $Q \in Gl_n(\mathbb{K})$ celle de $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}$

$\varphi \in \mathcal{L}(E,F) \qquad A_0 = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0\mathcal{C}_0}(\varphi) \qquad A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi) \qquad$ Alors $A_0 = QAP^{-1}$

E $\mathbb{K}-ev$ de dim n $\qquad \mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ deux bases de E $\qquad \varphi \in \mathcal{L}(E) \qquad A_0 = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(\varphi), A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi)$

Si P est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, $\qquad A_0 = PAP^{-1}$

A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$

La similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Deux matrices sont semblables *ssi* elles représentent la même app. lin. dans deux bases différentes

V. Rang d'une matrice

$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad A = (C_1 ... C_p)$ où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $C_j \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$

Le rang de A $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}_{\mathbb{K}}(C_1 ... C_p) = \dim_{\mathbb{K}}(Vect(C_1 ... C_p))$

$\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$

E $\mathbb{K}-ev$ de dim n $\qquad \mathcal{B}_0 = (e_1 ... e_n)$ base de E $\quad A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad$ Si $A = \mathcal{M}a_{\mathcal{B}_0}(v_1 ... v_n)$ alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(v_1 ... v_n)$

E et F deux $\mathbb{K}-ev$ de dim p et n $\qquad \mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{C}$ base de F $\qquad \varphi \in \mathcal{L}(E,F) \qquad A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi)$

Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ $\qquad \mathrm{rg}(A) = n$ *ssi* φ est surjective de E dans F

$\mathrm{rg}(A) = p$ *ssi* φ est injective de E dans F

Si $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_1 ... v_p)$ $\qquad \mathrm{rg}(A) = n$ *ssi* $(v_1 ... v_p)$ est génératrice

$\mathrm{rg}(A) = p$ *ssi* $(v_1 ... v_p)$ est libre

$(A, B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad A$ et B sont équivalentes s'il existe $\mathcal{P} \in Gl_n(\mathbb{K}), Q \in Gl_p(\mathbb{K})$ tq $A = PBQ^{-1}$

L'équivalence est une relation d'équivalence (!)

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes (la réciproque est fausse)

A et B sont équivalentes *ssi* il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ $\qquad \mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ bases de $E, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}$ bases de F tq

$A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0\mathcal{C}_0}(\varphi) \qquad B = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$

$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de rang $r \in [\![0, \min(n, p)]\!]$ $\qquad A$ est équivalente à $J_r^{n,p} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J_r)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \leq r \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

A et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes *ssi* elles ont le même rang

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à J_r^n *ssi* A est une matrice de projecteur $(A^2 = A)$

$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A) \qquad ({}^tJ_r^{np} = J_r^{pn})$

VI. Calcul explicite de rang – Pivot de Gauss

Opération sur les colonnes : $A \in \mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{K})$ Rappel : $A \times E_{i\,j} = (0 \quad \cdots \quad C_i \quad \cdots \quad 0)$

Opération	Multiplication à droite	Allure de la matrice
$C_i \leftrightarrow C_j$	$A(I_p - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})$ (envoie base sur base)	$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & & 0 & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \\ & & & \vdots & 1 & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & 0 & & & 1 & \vdots & & \\ & & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & \ddots \end{pmatrix} & \begin{matrix} {} \\ {} \\ {} \\ i \\ {} \\ {} \\ {} \\ j \\ {} \\ {} \end{matrix} \\ \begin{matrix} {} & {} & {} & i & {} & {} & {} & j & {} & {} \end{matrix} & \end{array}$
$C_i \leftarrow \alpha C_i \qquad (\alpha \in \mathbb{K}^*)$	$A(I_p + (\alpha - 1)E_{ii})$ (diagonale à coef. diag. non nuls)	$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} {} \\ {} \\ i \\ {} \\ {} \end{matrix} \end{array}$
$C_i \leftarrow C_i + \beta C_j \qquad (\beta \in \mathbb{K}, i \neq j)$	$A(I_p + \beta E_{ji})$ (triangulaire à coef. diag. non nuls)	$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \beta & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} {} \\ {} \\ {} \\ j \\ {} \end{matrix} \\ \begin{matrix} {} & i & {} & {} & {} \end{matrix} & \end{array}$

Ces trois opérations reviennent à multiplier A par des matrices de $Gl_p(\mathbb{K})$: On ne change pas le rang de A

On a les mêmes opérations sur les lignes, en multipliant à gauche : $E_{i\,j} \times A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T \in \mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{K}), T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \ddots & \lambda_r & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(T) = r$$

Pivot de Gauss pour le rang : On se ramène à une matrice triangulaire avec les opérations sur les lignes et les colonnes, pour éliminer tout ce qui est en-dessous de la diagonale.
Pivot de Gauss pour l'inverse : on se ramène à I_n avec les opérations sur les lignes OU sur les colonnes (pas les 2 à la fois), en commençant par obtenir une matrice triangulaire, puis en « remontant ». On fait les mêmes opérations en partant de I_n pour avoir l'inverse.

Astuce : $P \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ tq $P(A) = 0$: On a $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0 \Leftrightarrow A\left(\frac{-1}{a_0}\sum_{k=n}^{n} a_k A^{k-1}\right) = I_n$

VII. Compléments

$$\mathrm{tr}\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \quad \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{j\,j} \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \text{ est la trace de } A$$

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$\varphi \in \mathcal{L}(E)$ $\mathrm{tr}(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi))$ ne dépend pas de la base choisie : on la note $\mathrm{tr}(\varphi)$

Si p est un projecteur, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$

Matrice par blocs : $M \in \mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{K})$ $\quad n = m + t \quad$ $p = q + r$

$$M = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) \begin{array}{l} m \\ t \end{array} \\ \begin{array}{cc} q & r \end{array} \end{array} \qquad A \in \mathcal{M}_{m\,q}(\mathbb{K}) \quad B \in \mathcal{M}_{t\,q}(\mathbb{K}) \quad C \in \mathcal{M}_{m\,r}(\mathbb{K}) \quad D \in \mathcal{M}_{t\,r}(\mathbb{K})$$

$$M = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) \begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} \end{array} \in \mathcal{M}_{m\,p}(\mathbb{K}) \qquad N = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \end{array} \in \mathcal{M}_{p\,q}(\mathbb{K}) \qquad MN = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} AE + CG & AF + CH \\ \hline BE + DG & BF + DH \end{array}\right) \begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \end{array}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

- $\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$
- Il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v$
- Il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ tel que $A_0 X = \lambda X$

Un tel λ est valeur propre de f, un $v \in E \setminus \{0_E\}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ

$\ker(f - \lambda Id_E)$ est le sous-espace propre

f est diagonalisable *ssi* elle admet une base de vecteurs propres

Si $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $A_0 = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(f) = P\Delta P^{-1}$

$$\forall p \in \mathbb{N}, A_0^p = P\Delta^p P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{\ p} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{\ p} \end{pmatrix} P^{-1}$$

f est trigonalisable s'il existe $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Delta + N \in \mathcal{T}_n^s$