

Chap 21 : Intégrales sur un segment d'une fonction d'une variable réelle

I. Fonctions continues par morceaux

Dans toute cette partie, $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, I = [a, b]$

Dans toute cette partie, $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, I = [a, b]$

Une subdivision de I est de la forme $\sigma = (a_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ tel que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$

$\sigma = (a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $\tau = (b_j)_{j \in \llbracket 0, p \rrbracket}$ deux subdivisions de I

– On dit que σ est plus fine que τ si : $\{b_j, j \in \llbracket 0, p \rrbracket\} \subset \{a_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

– $\tau \vee \sigma$ est la subdivision obtenue en réordonnant $\{a_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \cup \{b_j, j \in \llbracket 0, p \rrbracket\}$

(Si σ plus fine que τ , $\tau \vee \sigma = \sigma$ $\tau \vee \sigma$ tjs plus fine que σ et τ)

Le pas de $\sigma = (a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est $\delta(\sigma) = \max_{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} (a_{j+1} - a_j)$

Une fonction $\varphi \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est dite en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de I

tq $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varphi|_{]a_j, a_{j+1}[} = \lambda_j$ est constante $\varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \chi_{]a_j, a_{j+1}[} + \sum_{k=0}^n \varphi(a_k) \chi_{\{a_k\}}$

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) = \{\text{fonctions en escalier sur } [a, b]\}$ est une sous algèbre de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$

Une fonction $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de I

tq $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} f|_{]a_j, a_{j+1}[} \text{ est continue} \\ f \text{ admet une limite finie en } a_j^+ \text{ et } a_{j+1}^- \end{cases}$

$\mathcal{C}^{\circ} pm([a, b], \mathbb{R}) = \{\text{fonctions continues par morceaux sur } [a, b]\}$ est une sous algèbre de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$

On dit que σ est une subdivision subordonnée à φ / f

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{\circ} p m([a, b], \mathbb{R})$ $\mathcal{C}^{\circ}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{\circ} p m([a, b], \mathbb{R})$

$f \in \mathcal{C}^{\circ} p m([a, b], \mathbb{R}) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^2$ tq $\begin{cases} \varphi \leq f \leq \psi \\ 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon \end{cases}$ sur $[a, b]$

Preuve : D'abord pour $f \in \mathcal{C}^{\circ}([a, b], \mathbb{R})$: Heine : f uni. continue $\Rightarrow \delta_0 > 0, \forall |x - y| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

σ de pas $\delta \leq \delta_0$ $f|_{]a_j, a_{j+1}[}$ bornée et atteint ses bornes $\Rightarrow \lambda_j = \max_{]a_j, a_{j+1}[} f$ $\mu_j = \min_{]a_j, a_{j+1}[} f$

$\varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \chi_{]a_j, a_{j+1}[} + f(a_n) \chi_{\{a_n\}}$ Idem ψ avec $\mu_j \dots \varphi \leq f \leq \psi \dots 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) = |f(x_j) - f(y_j)| \leq \varepsilon$

Cas général : on prolonge $f|_{]b_k, b_{k+1}[}$ sur $[b_k, b_{k+1}]$ par \mathcal{C}° . On traite ces parties comme $\hat{\uparrow}$ et on les réunit

II. Définition de l'intégrale sur un segment

$\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}), \sigma = (a_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ subdivision subordonnée. $\varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \chi_{]a_j, a_{j+1}[} + \sum_{k=0}^n \alpha_k \chi_{\{a_k\}}$

La quantité $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (a_{j+1} - a_j)$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

Elle est appelée intégrale de φ sur le segment $[a,b]$ et notée $\int_{[a,b]} \varphi$

Preuve : mq rajouter un c au milieu de la subdivision ne change rien + rec rapide : $I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma \vee \tau}(\varphi) = I_\tau(\varphi)$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \int_{[a,b]} \varphi \end{array} \right.$ est linéaire

Positivité de l'intégrale : $\forall \varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}),$ si $\varphi \geq 0$ sur $I,$ alors $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$

Croissance de l'intégrale : $\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})^2,$ si $\psi \geq \varphi$ sur $I,$ alors $\int_{[a,b]} \psi \geq \int_{[a,b]} \varphi$

Chasles : $\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}), c \in]a,b[\Rightarrow \varphi_{[a,c]} \in \mathcal{E}([a,c], \mathbb{R}), \varphi_{[c,b]} \in \mathcal{E}([c,b], \mathbb{R}) \quad \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$

L'intégrale est l'aire algébrique comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre $(x = a)$ et $(x = b)$

Changer la valeur de φ en un nombre fini de points n'affecte pas $\int_{[a,b]} \varphi$

Si φ constante égale à λ sur $I,$ $\int_{[a,b]} \varphi = \lambda(b-a)$

$f \in \mathcal{C}^0 p m([a,b], \mathbb{R}) \quad \mathcal{S}_f = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\} \quad \mathcal{D}_f = \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}), f \leq \psi \right\}$

\mathcal{S}_f est majorée et \mathcal{D}_f est minorée $\sup \mathcal{S}_f = \inf \mathcal{D}_f = \int_{[a,b]} f$ est l'intégrale de f sur $[a,b]$

Cette définition prolonge celle de $\int_{[a,b]}$ sur $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$

Preuve : Croissance de l'intégrale sur $\mathcal{E}(I, \mathbb{R}) \rightarrow$ maj/min. Densité de $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0 p m(I, \mathbb{R}), \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^0 p m(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_{[a,b]} f \end{array} \right.$ est linéaire

Positivité de l'intégrale : $\forall f \in \mathcal{C}^0 p m([a,b], \mathbb{R}),$ si $f \geq 0$ sur $I,$ alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$

Croissance de l'intégrale : $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0 p m([a,b], \mathbb{R})^2,$ si $g \geq f$ sur $I,$ alors $\int_{[a,b]} g \geq \int_{[a,b]} f$

Chasles $f \in \mathcal{C}^0 p m([a,b], \mathbb{R}), c \in]a,b[\quad \int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

Preuves : Encadrer avec φ et ψ d'une part $f / g \dots,$ d'autre part $\lambda f / (f + g) +$ linéarité dans $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$

$f \in \mathcal{C}^0 p m([a,b], \mathbb{R}) \quad M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad g \in \mathcal{C}^0 p m([a,b], \mathbb{R})$

$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq M |b-a| \quad \left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \quad \left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq M \int_{[a,b]} |g| \quad (\text{Inégalités de la moyenne})$

/!\ En général, on n'a pas $\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq M \left| \int_{[a,b]} g \right|$ /!\

$$f \in \mathcal{C}^0 pm(I, \mathbb{R}), \forall (c, d) \in I^2 \text{ on définit } \int_c^d f(t) dt = \begin{cases} \int_{[c,d]} f & \text{si } c < d \\ -\int_{[d,c]} f & \text{si } d < c \\ 0 & \text{si } d = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0 pm(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_c^d f(t) dt \end{cases} \text{ est linéaire. On vérifie Chasles : } \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in I^3, \int_\alpha^\gamma f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(t) dt + \int_\beta^\gamma f(t) dt$$

/!\ La positivité et la croissance ne sont vraies que si $c < d$ /!\

III. Sommes de Riemann

$f \in \mathcal{C}^0 pm(I, \mathbb{R}), \sigma = (a_j)_{j \in [0, n]}$ une subdivision adaptée. $\forall j \in [0, n-1]$, on prend $\xi_j \in [a_j, a_{j+1}]$. $\xi = (\xi_j)_{j \in [0, n-1]}$

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) f(\xi_j)$$

Théorème de convergence : $S(f, \sigma, \xi) \xrightarrow{\delta(\sigma) \rightarrow 0} \int_{[a,b]} f$

Preuve : Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}),$ Heine : $U.C^0 \Rightarrow \eta > 0$ tq $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) f(\xi_j) - \int_{[a,b]} f = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} (f(\xi_j) - f(t)) dt \quad |t - \xi_j| \leq |a_{j+1} - a_j| \leq \eta$$

$$\Rightarrow \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} |f(\xi_j) - f(t)| dt \leq \varepsilon_0 \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) = \varepsilon$$

(HP) pour les $\mathcal{C}^0 pm$, on partage la somme entre les parties continues et les parties où ξ_j est pt de discontinuité (nb fini). On les majore par le sup de f , négligeable quand $\delta \rightarrow 0$

Subdivisions régulières : $\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt \quad \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz : $(f, g) \in \mathcal{C}^0 pm([a, b], \mathbb{R})^2$

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Pour les fcts continues, on a égalité ssi } f = \lambda g$$

Preuve : $P(\lambda) = \int_a^b (f(t) - \lambda g(t))^2 dt \quad \forall \lambda, P(\lambda) \geq 0$ On dvp $P(\lambda)$ en polynôme de $\Delta \leq 0 \Rightarrow CS$

$$f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \quad \begin{cases} f \geq 0 \text{ sur } [a, b] \\ \int_a^b f(t) dt \geq 0 \end{cases} \text{ alors } f = 0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})} \quad (\text{preuve : contraposée + voisinage})$$

IV. Théorème fondamental de l'analyse et applications

$$f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \quad x_0 \in I \quad F \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt \end{cases} \quad F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } F' = f$$

Preuve : $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt \Leftrightarrow \Rightarrow |F(x+h) - F(x) - h f(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right|$
 $\varepsilon > 0, \delta > 0 \quad |t-x| \leq h \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow |F(x+h) - F(x) - h f(x)| \leq h \varepsilon \Rightarrow DL \text{ à l'ordre } 1$

Pour $f \in \mathcal{C}^0 pm(I, \mathbb{R})$, on montre de la même façon que f est F est dérivable hors des points de discontinuité.
 En revanche, Si $f \in \mathcal{C}^0 pm(I, \mathbb{R})$, alors $F \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

$(f, F) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$ On dit que F est une primitive de f sur I si $F \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $F' = f$
 Si F_0 est une primitive de f , alors $\{F \text{ primitive de } f\} = \{F_0 + k, k \in \mathbb{R}\}$

D'après le théorème de Darboux, toutes les fonctions n'admettent pas de primitives.

Tout fonction continue sur I admet une primitive sur I .

$\forall x_0 \in I, F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en 0

$$f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \quad F \text{ primitive de } f \text{ sur } I. \quad \int_a^b f(t) dt \neq F(b) - F(a) = [F(t)]_{t=a}^{t=b}$$

$$(f, g) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})^2 \quad \int_a^b f'(t)g(t) dt \neq [f(t)g(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

$f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \quad J$ intervalle de $\mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}), \varphi(J) \subset I \quad (c, d) \in J^2$

$$\int_c^d \underbrace{f \circ \varphi(u)}_{f(t)} \times \underbrace{\varphi'(u) du}_{dt} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t) dt$$

$$f \text{ paire} \Rightarrow \int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt \quad \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

$$f \text{ impaire} \Rightarrow \int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt \quad \int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

$$\int_{a-h}^{b-h} f(x+h) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$f \text{ T-périodique} : \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

$$\text{Valeur moyenne} : m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \sup_{[a,b]} |f|$$

$$G_1 : x \mapsto \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \quad \mathcal{G}_1'(x) = \varphi'(x) \times f \circ \varphi(x) - \psi'(x) \times f \circ \psi(x)$$

Formule de Taylor avec reste intégral :

$$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}), \forall (x, a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\text{On écrit aussi } \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = (x-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}((1-s)a + sx) ds$$

V. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

On étend la définition des fonctions continues par morceaux pour les fonctions à valeurs complexes

$$f \in \mathcal{C}^0 pm(I, \mathbb{C}) \quad f_1 = \operatorname{Re}(f) \quad f_2 = \operatorname{Im}(f) \quad \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i \int_a^b f_2(t)dt$$

On montre la linéarité, Chasles, les inégalités (sur le module), le lien avec les primitives, l'intégration par parties, la formule de Taylor avec reste intégral, et le changement de variable (REELLE).

On n'a pas l'égalité des accroissements finis, mais on a l'inégalité des AF :

$$\text{Inégalité des accroissements finis : } f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}) \quad \forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq \sup_{\substack{[a,b] \\ \text{ou } [b,a]}} |f'| |b - a|$$

$$\text{Inégalité de Taylor-Lagrange : } f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C}) \quad \forall (a, b) \in I^2, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \sup_{\substack{[a,b] \\ \text{ou } [b,a]}} |f^{(n+1)}| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Chap 21bis : Techniques de calcul de primitives et d'intégrales

On notera : $\int f(x)dx = \{\text{Ensembles des primitives de } f \text{ sur } I\} = F(x) + k$

I. Rappel des techniques de base

$$\text{IPP : } \int (f'g)(x)dx = f(x)g(x) - \int (fg')(x)dx$$

Changement de variable : φ difféomorphisme ($\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ et $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^1(J, I)$), $g = f \circ \varphi$

$$\int f(x)dx = \int g(u)du = G(u) + k = G(\varphi^{-1}(x)) + k \quad (\text{On pose } u = \varphi^{-1}(x))$$

II. Fonctions rationnelles

Idée : décomposition en éléments simples

$$\text{Parties polaires : } \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + c \quad (!\setminus \text{uniquement dans } \mathbb{R})$$

$$(n > 1) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + k$$

$$\frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n} \text{ irréductible dans } \mathbb{R} :$$

On se ramène à $\frac{\gamma x + \delta}{(1+x^2)^n}$ par mise sous forme canonique et changement de variable

III. Exponentielles, fonctions trigonométriques et polynômes

$$\int e^{\alpha x} P(x) dx \text{ avec } P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ et } \alpha \in \mathbb{C} :$$

- Soit on fait n intégrations par parties, jusqu'à avoir $\deg P = 0$
- Soit on cherche une primitive sous la forme $x \mapsto e^{\alpha x} Q(x)$ avec $\deg P = \deg Q$

$$\int \cos(\alpha x) P(x) dx \text{ ou } \int \sin(\alpha x) P(x) dx \text{ avec } P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} :$$

- Soit on fait n intégrations par parties, jusqu'à avoir $\deg P = 0$
- Soit on cherche une primitive sous la forme $x \mapsto Q(x)\cos(\alpha x) + R(x)\sin(\alpha x)$
- Soit on écrit (si $P \in \mathbb{R}[X]$), $\int \cos(\alpha x) P(x) dx = \text{Re} \left(\int e^{i\alpha x} P(x) dx \right)$

IV. Polynômes et fractions trigonométriques

$$\int \cos^n x \sin^p x dx$$

– Si n ou p impair : (p .ex $n = 2k + 1$)

$$\int (\cos^2 x)^k \cos x \sin^p x dx = \int \cos x \sin^p x (1 - \sin^2 x) dx = \int u^p (1 - u^2)^k du$$

$$= Q(u) + k = Q(\sin x) + k$$

$$\begin{cases} u = \sin x & x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ du = \cos x dx & u \in [-1; 1] \end{cases}$$

– Si n et p sont pairs

On linéarise pour se ramener à $\sum a_k \sin(kx) + \sum b_k \cos(kx)$

$$\int \cos(kx) \sin(lx) dx : \text{Formules de trigo + produit} \rightarrow \text{somme}$$

$$\int F(\cos x, \sin x) dx \text{ fraction rationnelle trigonométrique. On veut se ramener à } \int G(t) dt \text{ avec } G \in \mathbb{R}(X)$$

– Cas simples : on tente de poser $t = \cos x, \sin x$ ou $\tan x$.

* Pour pouvoir écrire $\alpha = G(\cos x) \sin x dx$, on vérifie que $F(\cos(-x), \sin(-x)) = -F(\cos x \sin x)$

* Pour pouvoir écrire $\alpha = G(\sin x) \cos x dx$, on vérifie que $F(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x)) = -F(\cos x \sin x)$

* Pour pouvoir écrire $\alpha = G(\tan x)(1 + \tan^2 x) dx$, on vérifie que $F(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x)) = F(\cos x \sin x)$

– Cas général : on prend

$$\begin{cases} t = \tan \frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{On aura } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

V. Radicaux

– Radicaux affines : $x \mapsto \sqrt{ax+b}$: On pose généralement $u = \sqrt{ax+b}$

De même pour $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} dx$, on pose en général $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

– Radicaux $\sqrt{ax^2+bx+c}$: on le met sous forme canonique $\sqrt{t^2-1}, \sqrt{1-t^2}$ ou $\sqrt{t^2+1}$

* Pour $\sqrt{1-t^2}$, on pose

$$\begin{cases} t = \sin \theta \in]-1, 1[& \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ dt = \cos \theta d\theta & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta \end{cases}$$

* Pour $\sqrt{t^2-1}$, on pose

$$\begin{cases} t = \text{ch } x \in]1; +\infty[\\ dt = \text{sh } x dx & \sqrt{t^2-1} = \sqrt{\text{ch}^2 \theta - 1} = \text{sh } \theta \end{cases}$$

* Pour $\sqrt{1+t^2}$, on pose

$$\begin{cases} t = \tan \theta \in \mathbb{R} & \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ dt = (1 + \tan^2 \theta) d\theta & \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{\cos \theta} \end{cases}$$