Chap 21bis : Techniques de calcul de primitives et d'intégrales

On notera : $\int f(x)dx = \{$Ensembles des primitives de f sur $I\} = F(x)+k$

I. Rappel des techniques de base

IPP : $\int (f'g)(x)dx = f(x)g(x) - \int (fg')(x)dx$

Changement de variable : φ difféomorphisme ($\varphi \in \mathcal{C}^1(I,J)$ et $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^1(J,I)$), $g = f \circ \varphi$

$\int f(x)dx = \int g(u)du = G(u)+k = G(\varphi^{-1}(x))+k$ (On pose $u = \varphi^{-1}(x)$)

II. Fonctions rationnelles

Idée : décomposition en éléments simples

Parties polaires : $\int \frac{1}{x-a}dx = \ln(x-a)+c$ (/!\ uniquement dans $\mathbb{R}$)

$(n>1)$ $\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+k$

$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}$ irréductible dans $\mathbb{R}$:

On se ramène à $\frac{\gamma x+\delta}{(1+x^2)^n}$ par mise sous forme canonique et changement de variable

III. Exponentielles, fonctions trigonométriques et polynômes

$\int e^{\alpha x}P(x)dx$ avec $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$:

– Soit on fait n intégrations par parties, jusqu'à avoir $\deg P = 0$

– Soit on cherche une primitive sous la forme $x \mapsto e^{\alpha x}Q(x)$ avec $\deg P = \deg Q$

$\int \cos(\alpha x)P(x)dx$ ou $\int \sin(\alpha x)P(x)dx$ avec $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

– Soit on fait n intégrations par parties, jusqu'à avoir $\deg P = 0$

– Soit on cherche une primitive sous la forme $x \mapsto Q(x)\cos(\alpha x) + R(x)\sin(\alpha x)$

– Soit on écrit (si $P \in \mathbb{R}[X]$), $\int \cos(\alpha x)P(x)dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{i\alpha x}P(x)dx\right)$

IV. Polynômes et fractions trigonométriques

$\int \cos^n x \sin^p x dx$

– Si n ou p impair : ($p.ex\, n = 2k+1$)

$$\int (\cos^2 x)^k \cos x \sin^p x dx = \int \cos x \sin^p x (1-\sin^2 x) dx = \int u^p (1-u^2)^k du \qquad \begin{cases} u = \sin x & x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ du = \cos x dx & u \in [-1;1] \end{cases}$$

$$= Q(u) + k = Q(\sin x) + k$$

– Si n et p sont pairs

On linéarise pour se ramener à $\sum a_k \sin(kx) + \sum b_k \cos(kx)$

$\int \cos(kx)\sin(lx)dx$: Formules de trigo + produit $\to$ somme

$\int F(\cos x, \sin x) dx$ fraction rationnelle trigonométrique. On veut se ramener à $\int G(t)dt$ avec $G \in \mathbb{R}(X)$

– Cas simples : on tente de poser $t = \cos x, \sin x$ ou $\tan x$.

* Pour pouvoir écrire $\alpha = G(\cos x)\sin x dx$, on vérifie que $F(\cos(-x), \sin(-x)) = -F(\cos x \sin x)$
* Pour pouvoir écrire $\alpha = G(\sin x)\cos x dx$, on vérifie que $F(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x)) = -F(\cos x \sin x)$
* Pour pouvoir écrire $\alpha = G(\tan x)(1+\tan^2 x)dx$, on vérifie que $F(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x)) = F(\cos x \sin x)$

– Cas général : on prend $\begin{cases} t = \tan \frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2 \frac{x}{2}\right) \end{cases} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

On aura $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

V. Radicaux

– Radicaux affines : $x \mapsto \sqrt{ax+b}$: On pose généralement $u = \sqrt{ax+b}$

De même pour $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} dx$, on pose en général $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

– Radicaux $\sqrt{ax^2+bx+c}$: on le met sous forme canonique $\sqrt{t^2-1}, \sqrt{1-t^2}$ ou $\sqrt{t^2+1}$

* Pour $\sqrt{1-t^2}$, on pose $\begin{cases} t = \sin\theta \in]-1,1[& \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ dt = \cos\theta d\theta \end{cases} \qquad \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$
* Pour $\sqrt{t^2-1}$, on pose $\begin{cases} t = \operatorname{ch} x \in]1; +\infty[\\ dt = \operatorname{sh} x dx \end{cases} \qquad \sqrt{t^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\theta - 1} = \operatorname{sh}\theta$
* Pour $\sqrt{1+t^2}$, on pose $\begin{cases} t = \tan\theta \in \mathbb{R} & \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ dt = (1+\tan^2\theta)d\theta \end{cases} \qquad \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{\cos\theta}$