Chap 20 : Corps des fractions rationnelles

Rappel : A anneau intègre commutatif, Pour construire son corps de fraction :

- On munit $A\times(A\setminus\{0_A\})$ d'une relation déquivalence : $(p,q)\sim(p',q')\Leftrightarrow pq'=p'q$

K est l'ensemble des classes d'équivalence, et $\dfrac{p}{q}=[(p,q)]$

- On munit Kde lci $+$ et $\times$ prolongeant celles de A

- On a l'injection $\begin{cases} A\to K \\ p\mapsto[(p,1)]\end{cases}$

$(K,+,\times)$ est un corps

I. Corps $\mathbb{K}(X)$

$\mathbb{K}[X]$ est intègre et commutatif $\Rightarrow$ On construit son corps de fraction $\mathbb{K}(X)$

$\mathbb{K}(X)=\left\{\dfrac{P}{Q},P\in\mathbb{K}[X],Q\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0_{\mathbb{K}[X]}\}\right\}$ $\qquad$ $\dfrac{P_1}{Q_1}=\dfrac{P_2}{Q_2}\Leftrightarrow P_1Q_2=P_2Q_1$

$F\in\mathbb{K}(X)\setminus\{0_{\mathbb{K}(X)}\}$. Il existe un unique couple (à un coefficient constant près) $(P_0,Q_0)\in(\mathbb{K}[X]\setminus\{0_{\mathbb{K}[X]})^2$

tq $\begin{cases} F=\dfrac{P_0}{Q_0} \\ P_0\wedge Q_0=1\end{cases}$ $\qquad$ $(preuve: P_0Q_1=P_1Q_0+Gauss)$

$F=\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$ $\qquad$ $n=\deg P-\deg Q$ ne dépend pas des représentants choisis : c'est le degré de F

$\deg(FG)=\deg F+\deg G$ $\qquad$ $\deg(F+G)\leq\max(\deg F,\deg G)$

$F=\dfrac{P_0}{Q_0}$ son écriture <u>irréductible</u>. Les racines de F sont les racines de P_0 dans $\mathbb{K}$, les pôles de F celles de Q_0

A toute fraction rationnelle $F=\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$, on associe une fonction rationnelle : $\widetilde{F}\begin{cases}\mathbb{K}\setminus\{\text{pôles de } F\}\to\mathbb{K} \\ x \mapsto \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}\end{cases}$

F et $G\in\mathbb{K}(X)\setminus\{0\}$, $D_1=\mathbb{K}\setminus\{\text{pôles de } F\}, D_2=\mathbb{K}\setminus\{\text{pôles de } G\}$

Sur $D_1\cap D_2$ $\qquad$ $\widetilde{F+G}=\widetilde{F}+\widetilde{G}$ $\qquad$ $\widetilde{FG}=\widetilde{F}\widetilde{G}$

II. Décomposition en éléments simples

$\mathbb{K}_0(X)=\{F\in\mathbb{K}(X),\deg F<0\}$ est un *sev* de $\mathbb{K}(X)$

$\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}(X)$ $\qquad$ $\mathbb{K}_0(X)\oplus\mathbb{K}[X]=\mathbb{K}(X)$

Pour tout $F\in\mathbb{K}(X)$, $\exists!(A,F_0)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}_0(X)$ tq $F=A+F_0$

A est la partie entière de F, et F_0 sa partie fractionnaire.

La suite supposera $\underline{F \in \mathbb{K}_0(X)}$

$$F = \frac{P}{Q_1 Q_2} \in \mathbb{K}_0(X) \setminus \{0\}, Q_1 \wedge Q_2 = 1 \qquad \exists!(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2 \ tq \ \begin{cases} F = \dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} \\ \deg P_1 < \deg Q_1 \qquad \deg P_2 < \deg Q_2 \end{cases}$$

Preuve : Bezout $\Rightarrow \dfrac{PU}{Q_2} + \dfrac{PV}{Q_1}$ $\qquad DE \Rightarrow F = \underbrace{A_1 + A_2}_{0 \text{ car } F \in \mathbb{K}_0(X)} + \dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2}$

Unicité : $Q_2(R_1 - P_1) = Q_1(P_2 - R_2), Q_1 \wedge Q_2 = 1 \Rightarrow Q_1 \mid (R_1 - P_1) \quad 0$

$$F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}_0(X) \setminus \{0\} \quad Q = \prod_{j=1}^{N} Q_j$$ F s'écrit de manière unique $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{P_j}{Q_j}$ $(\forall j, \deg P_j < \deg Q_j)$

$F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}_0(X) \setminus \{0\} \quad Q = \displaystyle\prod_{j=1}^{N} S_j^{\alpha_j}$ avec les $(S_j)_j$ irréductibles premiers entre eux 2 à 2.

$\exists!(P_1, \ldots, P_N) \in \mathbb{K}[X]^N$ tq $F = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{P_j}{S_j^{\alpha_j}}$ avec $\deg P_j < \deg(S_j^{\alpha_j})$

Si $S_j = (X - a_j), a_j \in \mathbb{K}$ $\qquad \dfrac{P_j}{(X - a_j)^{\alpha_j}} \in \mathbb{K}_0(X)$ est appelé partie polaire associée au pôle a_j

$F = \dfrac{P}{S^\alpha} \in \mathbb{K}_0(X)$, F s'écrit de manière unique $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{R_k}{S^k}$ avec $\deg R_k < \deg S$

Preuve : Existence : divisions euclidiennes successives

Unicité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\alpha} (R_k - T_k) S^{\alpha - k} = 0$ $\{(R_k - T_k) S^{\alpha-k}, k / R_k \neq T_k\}$ échelonnée donc libre $\Rightarrow$ contradiction

Pour les parties polaires : $F = \dfrac{P}{(X - a)^\alpha} \in \mathbb{K}_0(X)$ $\qquad \exists!(\lambda_1 \ldots \lambda_\alpha) \in \mathbb{K}^\alpha$ tq $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{\lambda_k}{(X - a)^k}$

(Preuve plus simple : Décomposition de P sur la base de $\mathbb{K}_{\alpha-1}[X] : ((X - a)^k)_k$)

$F \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\}$ $\qquad F = \dfrac{P}{Q}$ avec $Q = \displaystyle\prod_{j=1}^{N} S_j^{\alpha_j}$ avec les S_j premiers entre eux 2 à 2

F s'écrit de manière unique sous la forme $F = A + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\alpha_j} \frac{R_{j,k}}{S_j^{\,k}}$ $\qquad A \in \mathbb{K}[X], \quad \forall j, \forall k, \deg R_{j,k} < \deg S_j$

Dans $\mathbb{C}$, $Q = \displaystyle\prod_{j=1}^{N} (X - a_j)^{\alpha_j}$ $\qquad F = A + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\alpha_j} \frac{\lambda_{j,k}}{(X - a_j)^k}$

III. Détermination des différents éléments

Pour un pôle simple :

$F=\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{K}_0(X)$ $\quad a$ pôle simple de F. La partie polaire associée à a est de la forme $(Q=(X-a)R)$

$$\frac{\lambda}{X-\alpha} \text{ avec } \lambda=\frac{P(a)}{R(a)}=\frac{P(a)}{Q'(a)}$$

Preuve : $\dfrac{P}{R}=(X-a)F=\lambda+\dfrac{(X-a)P_2}{R}\Rightarrow\dfrac{P(a)}{R(a)}=\lambda+0 \qquad Q'=(X-a)R'+R\Rightarrow R(a)=Q'(a)$

Pour 0 comme pôle multiple :

$$F=\frac{P}{X^nQ}\Leftrightarrow\frac{P(x)}{Q(x)}=x^nF=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}x^k+x^n\underbrace{\frac{P_2(x)}{Q(x)}}_{\varepsilon(x^n)}$$

Les $(a_{n-k})_k$ sont les coefficients du DL de $\dfrac{P}{Q}$ en 0 (/!\ en ordre inverse)

Pour un autre pôle multiple : on translate

Pour les dénominateurs irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{R}$:

- soit on passe par $\mathbb{C}$
- soit on regarde les limites (en 0, $\pm\infty$...)

Pour P scindé, $(x_1 ... x_n)$ ses racines (avec multiplicité) $\dfrac{P'}{P}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}$