Chap 2 : Corps des nombres complexes

I. $\mathbb{C}$ et écriture algébrique

Idée de la construction : on munit $\mathbb{R}^2$ de deux LCI :

$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ $\qquad$ $(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx')$

$\mathbb{R}^2$ munit de ces deux LCI forme un corps commutatif : $\mathbb{C}$

On note $i=(0,1)$

$\varphi\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ x\mapsto(x,0)\end{cases}$ est un morphisme de corps injectif : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

L'ensemble des imaginaires purs : $\Im=i\mathbb{R}=\{x\times i,x\in\mathbb{R}\}=\{(0,x),x\in\mathbb{R}\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}\cap\Im=\varnothing$

Pour tout $x\in\mathbb{C}$, il existe un unique $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $z=a+ib$: c'est l'écriture algébrique de z

On définit le conjugué de z : $\bar{z}=a-ib$

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ $\qquad$ $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$ $\qquad$ $\bar{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $\bar{z}=-z\Leftrightarrow z\in\Im$ $\qquad$ $\bar{z}z=a^2+b^2\in\mathbb{R}_+$ (où $z=a+ib$)

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, le module de $z=a+ib$ est : $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $|zz'|=|z||z'|$ $\qquad$ $|z|=0\Leftrightarrow z=0_{\mathbb{C}}$ $\qquad$ $|z|=z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}_+$

$|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$ $\qquad$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z^2}$ $\qquad$ $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$

$|z+z'|^2=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})+|z'|^2$ $\qquad$ $||z|-|z'||\leq|z\pm z'|\leq|z|+|z'|$

Preuve : $|z+z'|^2=|z+z|\times|\bar{z}+\bar{z}|=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})+|z'|^2$

$\mathrm{Re}(z\bar{z'})\leq|z\overline{z'}|=|z||\bar{z}|\Rightarrow|z+z'|^2\leq|z|^2+2|z||z'|+|z'|^2\Leftrightarrow|z+z'|^2\leq(|z|+|z'|)^2$

$|z|=|z-z'+z'|\leq|z-z'|+|z'|\Leftrightarrow|z|-|z'|\leq|z-z'|$

De même $|z'|-|z|\leq|z-z'|\Leftrightarrow||z'|-|z||\leq|z-z'|$

II. $\mathbb{U}$ et écriture géométrique

On définit $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C},|z|=1\}$ $\qquad$ $(\mathbb{U},\times)$ est un groupe

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\in\mathbb{C}$

$\varphi\begin{cases}(\mathbb{R},+) & \to(\mathbb{U},\times)\\ \theta & \mapsto e^{i\theta}\end{cases}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{U},\times)$

Il est surjectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$, mais n'est pas injectif : $\forall\theta,\theta'\in\mathbb{R}$, $\varphi(\theta)=\varphi(\theta')\Leftrightarrow\theta=\theta'+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$

$\forall\theta\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}$ $\qquad$ $\overline{e^{i\theta}}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ $\qquad$ $e^{ni\theta}=(e^{i\theta})^n$

Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, il existe un unique $\rho\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$ (unique $\bmod 2\pi$) tel que $z=\rho e^{i\theta}$

Cette écriture est appelée écriture géométrique de z, et [la classe de] $\theta\bmod 2\pi$ est l'argument de z

Soit $\mathcal{P}$ plan (affine euclidien) muni d'un repère ortonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\varphi\begin{cases}\mathbb{C} & \to \mathcal{P} \\ z = x+iy \mapsto M & \text{tel que } \overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}\end{cases}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{P}$

Pour tout $M \in \mathcal{P}$, $z = \varphi(M)$ est appelé l'affixe de M, on note $z = Aff(M)$

$|z|$ représente alors la norme de $\overrightarrow{OM}$, et $\theta = \arg(z) \equiv (\vec{i},\overrightarrow{OM})[2\pi]$

$\forall z,z' \in \mathbb{C}^* \qquad \arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')[2\pi] \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi] \qquad z \in \Im \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

$A,B,C,D \in \mathcal{P}\setminus\{O\} \qquad z_A = Aff(A), z_B = Aff(B), z_C = Aff(C), z_D = Aff(D) \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})[2\pi]$

A,B,C alignés $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{R}$ $\qquad ABC$ triangle rectangle $\Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \in \Im$

III. Racines n$^{\text{ièmes}}$

On pose $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\} = \{e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in [\![0,n-1]\!]\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité

$(\mathbb{U}_n,\times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{U},\times)$ $\qquad X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}}\right)$ $\qquad$ (racines du polynôme $X^n - 1$)

$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (Racine 3^{e} de l'unité) $\qquad \omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}} \qquad (n \geq 2): \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$

$n \geq 2 \quad P(X) = X^n - 1 = (X-1)Q(X)$ avec $Q(X) = \sum_{k=1}^{n-1} X^k$

z_0 racine n$^{\text{ième}}$ $(n \geq 2)$ de $a \in \mathbb{C}^*$: $z^n = a \Leftrightarrow z = z_0 e^{\frac{2i\pi k}{n}}$, $\qquad k \in [\![0,n-1]\!]$

Racines carrées de $a = \rho e^{i\theta}$: $\pm\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou système : $\begin{cases}\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(a) \\ |z|^2 = |a|\end{cases}$

Solution de $az^2 + bz + c = 0$: $\quad \delta^2 = b^2 - 4ac$

$*\delta^2 = 0 \Rightarrow$ 1 solution $z_0 = \frac{-b}{2a}$ $\qquad *\delta^2 \neq 0 \Rightarrow$ 2 solutions : $\frac{-b \pm \delta}{2a}$

La notation $\sqrt{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ n'a AUCUN SENS

IV. Transformations géométriques

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$

$f:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. L'écriture analytique de f est : $\tilde{f}\begin{cases}\mathbb{C} & \to\mathbb{C}\\ z=Aff(M) & \mapsto z'=Aff(f(M))\end{cases}$

$\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $\omega=Aff(\vec{v})$ L'écriture analytique de la translation $t_{\vec{v}}$: $\tilde{t}_{\vec{v}}:\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto z+\omega\end{cases}$

Ecriture analytique de h homothétie de centre Ω (d'affixe ω) et de rapport $\alpha\in\mathbb{R}^*$: $\tilde{h}\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto \alpha(z-\omega)+\omega\end{cases}$

Ecriture analytique de r rotation de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle $\theta\in\mathbb{R}$: $\tilde{r}\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega\end{cases}$

Une similitude du plan est une application $f\in\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{P})$ tel qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $(A,B)\in\mathcal{P}$
$d(f(A),f(b))=\lambda d(A,B)$ λ est le rapport de la similitude

Elle est directe si elle préserve l'orientation : $\forall A,B,C\in\mathcal{P},(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv(\overrightarrow{f(A)f(B)},\overrightarrow{f(A)f(C)})[2\pi]$

Voir Chap 29 : Géométrie affine

$f\in\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{P})$ d'écriture analytique $\tilde{f}\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto az+b\end{cases}$ $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ est une similitude directe de rapport $|a|$

- $a=1\Rightarrow f$ est une translation de vecteur $\vec{v}$ avec $Aff(\vec{v})=b$
- $a\neq 1\Rightarrow f$ admet un unique point fixe Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$ et f s'écrit $f=h\circ r=r\circ h$ avec :

  r rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$

  h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$

$s\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto \bar{z}\end{cases}$ est l'écriture analytique de la symétrie d'axe $(O,\vec{i})$: elle conserve les distances

et les angles non orientés, mais inverse l'orientation

$G=Bary\{(A_j,a_j),j\in[\![1,p]\!]\}$ avec $\sum_{j=1}^{p}a_j\neq 0\Rightarrow z_G=\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{p}a_j}\sum_{j=1}^{p}a_j z_{A_j}$

$\mathcal{C}(\Omega,R)=\{M\in\mathcal{P},M\Omega=\mathbb{R}\}\simeq\{z\in\mathbb{C},|z-\omega|=R\}$

$(AB)//(CD)\Leftrightarrow\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$