Chap 18 : Espaces vectoriels (II)

E sera un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

I. Quelques compléments

$f\in\mathscr{L}(E)$ $\quad G$ supp de $\ker f$ $\quad\Rightarrow f_{\backslash G}$ isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} f$

$(x_j)_{j\in J}\in E^J$ est génératrice de E si $Vect(x_j)_{j\in J}=E$ (Idem avec parties)

$(x_j)_{j\in J}\in E^J$ est libre dans E si $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall (j_k)_{k\in[\![1,n]\!]}\in J^n,\forall(\lambda_k)_{k\in[\![1,n]\!]}\in\mathbb{K}^n$

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_{j_k}=0_E\Rightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\lambda_k=0$$

Une famille non libre est liée

$K\subset\mathbb{K}$ A génératrice dans un $K-ev\Rightarrow A$ génératrice dans le $\mathbb{K}-ev$

$K\subset\mathbb{K}$ A libre dans un $\mathbb{K}-ev\Rightarrow A$ libre dans le $K-ev$

F famille libre $\Rightarrow$ toute sous-famille de F est libre

F famille génératrice $\Rightarrow$ toute sur-famille de F est génératrice

(u,v) libre *ssi* u et v ne sont pas colinéaires

Si $0_E\in F$ ou s'il y a un doublon dans une famille F, F est liée

A partie libre de E. $x_0\in E$ $\quad A\cup\{x_0\}$ libre *ssi* $x_0\notin Vect(A)$

Une famille F est une base de E si elle est libre et génératrice dans E

$\Leftrightarrow$ Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme CL de vecteurs de F

II. Dimensions

E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie

Lemme de la dimension : A partie génératrice de E

$\Rightarrow$ Toute partie libre L de E est finie, de cardinal $card(L)\leq card(A)$

Preuve du lemme : Récurrence sur card(A) → 3 cas : - L dans A (OK),

$-\exists a\in A, a\notin Vect(L)\Rightarrow L\cup\{a\}$ libre $\quad\forall v\in L, v=\tilde{v}+\alpha_v a\quad \tilde{v}\in Vect(A\backslash\{a\})$

$\Rightarrow(\tilde{v})_{v\in L}$ libre dans $vect(A\backslash\{a\})\quad card(A\backslash\{a\})=n\Rightarrow$ hypothèse de récurrence...

$-\forall a\in A, a\in Vect(L)\quad v_0\in L, v_0=\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j a_j\quad$ Supp $\lambda_{n+1}\neq 0\Rightarrow a_{n+1}\in Vect((a_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\cup\{v_0\})$

$\forall v\in L\backslash\{v_0\}\quad v=\tilde{v}+\alpha_v v_0\quad \tilde{v}\in Vect(a_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\quad\Rightarrow(\tilde{v})_{v\in L}$ libre dans $Vect(a_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$

$\Rightarrow Hypothèse\ de\ récurrence : Card(L\backslash\{v_0\})\leq n$

Théorème de la base incomplète : E $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie

L partie libre de E, S partie génératrice de E

$$\exists S_0\subset S \text{ tq } \begin{cases} S_0\cap L=\varnothing \\ S_0\cup L \text{ est une base de E}\end{cases}$$

Preuve : $\mathbb{S}=\{S_0 \subset S \quad S_0 \cap L=\varnothing \quad S_0 \cap L$ libre$\}$

$\mathfrak{N}=\{Card(S_0) \quad S_0 \in \mathbb{S}\}$ partie de $\mathbb{N}$ non vide et maj d'après le lemme $\Rightarrow$ plus grand élément S_1

$v \in S$ Si $v \in S_1 \Rightarrow v \in Vect(S_1 \cup L)$ Si $v \notin S_1 \Rightarrow$ Si $v \notin Vect(S_1 \cup L)$: $par\, l'absurde \Rightarrow S_1 \cup L$ base

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base de dimension finie

Toute famille libre de E peut être complétée en une base

On peut extraire de S famille génératrice quelconque une base S_0

Toutes les bases de E espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont même cardinal

Preuve : 2 bases B (finie) et C. C libre, B gén finie => card C ≤ card B. idem dans l'autre sens

La dimension de E est le cardinal commun à toutes les bases de E

S base *ssi* S génératrice minimale *ssi* S famille libre maximale

Preuves : contraposées

$(v_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in E^n \qquad \psi \begin{cases} \mathbb{K}^n \to E \\ (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \end{cases} \in \mathfrak{L}(\mathbb{K}^n, E)$

ψ injective *ssi* $(v_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ libre

ψ surjective *ssi* $(v_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ génératrice

$\varphi \in \mathfrak{L}(E,F)$ $\quad \varphi$ injective de E dans F *ssi* $\forall L$ famille libre de E, $\varphi(L)$ libre dans F $\quad$ ($idée$: (v) fam libre)

φ surjective de E dans F *ssi* $\forall S$ famille génératrice de E, $\varphi(S)$ génératrice de F

ssi $\exists S$ famille génératrice de E, $\varphi(S)$ génératrice de F

III. Calculs de dimensions

Tout *sev* F de E (de dimension finie) est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$ avec égalité *ssi* $E=F$

F sev de E admet au moins un supplémentaire dans E

Si $F \oplus G = E, (e_1...e_n)$ base de F, $(w_1...w_q)$ base de $G \Rightarrow (e_1...e_n, w_1...w_q)$ base de E

$F \oplus G = E \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$

$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$

$F \oplus G = E \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F+G=E \\ \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G \end{cases}$

$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}} E + \dim_{\mathbb{K}} F \qquad \dim(E^n) = n\dim(E)$

$\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{L}(E,F)) = \dim_{\mathbb{K}} E \times \dim_{\mathbb{K}} F$

Preuve : $(e_1...e_n)$ base de E $\qquad \psi \begin{cases} \mathfrak{L}(E,F) \to F^n \\ f \mapsto (f(e_1)...f(e_n)) \end{cases}$ isomorphisme...

E (fini) et F $\mathbb{K}-ev, (e_1...e_n)$ base de $E, (v_1...v_n)$ famille quelconque de F

$\exists! f \in \mathfrak{L}(E,F)$ tq $\forall j \in [\![1,n]\!], f(e_j)=v_j$

Base de $\mathcal{L}(E,F)$: $(e_1...e_n)$ base de E, $(v_1...v_q)$ base de F

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ f_{i,j}=\begin{cases} E\to F \\ e_i\mapsto w_j \\ e_k\,(k\neq i)\mapsto 0_F\end{cases} \qquad (f_{i,j})_{i,j} \text{ base de } \mathcal{L}(E,F)$$

E (fini) et F $\mathbb{K}-ev$. S'il existe un isomorphisme de E dans F, alors $\dim F=\dim E$

E et F $\mathbb{K}-ev$ finis. Ils sont isomorphes *ssi* ils ont la même dimension

Preuve : → ok, ← passer par la bij avec $\mathbb{K}^n$

IV. Rang

$(v_j)_{j\in J}\in E^J \qquad rg((v_j)_{j\in J})=\dim(Vect((v_j)_{j\in J}))$

$(v_j)_{j\in J}$ famille d'éléments de E $\mathbb{K}-ev$ de dim finie :

$rg((v_j)_{j\in J})$ est le cardinal de la plus grande famille libre que l'on peut en extraire

$(v_1,...,v_n)\in E^n$ $rg(v_1,...,v_n)=n$ *ssi* $(v_1,...,v_n)$ est libre

$\dim(E)=n \qquad (v_j)_{j\in J}$ génératrice de E *ssi* $rg((v_j)_{j\in J})=n$

$rg(v_1,...,v_n)\leq \min(\dim E, n)$

E de dim finie, $\qquad \varphi\in\mathcal{L}(E,F) \qquad rg(\varphi)=\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=\dim(\varphi(E))$

$\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ base de E $\qquad \varphi\in\mathcal{L}(E,F) \qquad rg(\varphi)=rg(\varphi(e_1),...,\varphi(e_n))$

$\varphi(F)$ sev de $F \Rightarrow rg(\varphi)\leq \dim F$

$\varphi\in\mathcal{L}(E,F) \qquad rg(\varphi)\leq\dim E \qquad rg(\varphi)=\dim E$ *ssi* φ injective de E dans F

Théorème du rang : $\dim(E)=\dim(\ker\varphi)+rg(\varphi)$

Si $\dim_{\mathbb{K}} E=\dim_{\mathbb{K}} F \qquad \varphi$ injective $\Leftrightarrow \varphi$ surjective $\Leftrightarrow \varphi$ isomorphisme

$rg(g\circ f)\leq \min(rg(f), rg(g))$

h surjective $\Rightarrow rg(f\circ h)=rg(f) \qquad h$ injective $\Rightarrow rg(h\circ f)=rg(f)$

V. Hyperplans et formes linéaires

Une forme linéaire sur E est une app. lin. $\varphi\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$

L'espace dual $E^*=\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$

Si E de dim finie, $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ base de E, $\forall j\in[\![1,n]\!], a_j=\varphi(e_j)$

$$\varphi=\begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ v=\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\end{cases} \qquad \mathrm{Im}\,\varphi=\{0_{\mathbb{K}}\} \text{ ou } \mathbb{K}$$

E $\mathbb{K}-ev$ $\qquad$ un hyperplan H est un sev de E qui admet comme supplémentaire un sev de dimension 1

Si $\dim E=n$, alors les hyperplans sont de dimension $(n-1)$

E $\mathbb{K}-ev$ $\quad H$ hyperplan *ssi* $\exists\varphi\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K}),\varphi\neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ tq $H=\ker\varphi$

Preuve : → on définit une app. Sur H et sur Vect(x_0), tq $\phi_{\backslash H}=0_{L(E)}$ et $\phi_{\backslash Vect(x_0)}(ax_0)=a$, on vérifie H=ker ϕ
← on prend x_0 tq $\phi(x_0)=1$, on montre $H\oplus Vect(x_0)=E$ $\quad (v=\phi(v)x_0+(v-\phi(v)x_0))$

E^* est un espace vectoriel de même dimension que E (de dim finie)

$\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ base de $E\Rightarrow\exists!(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in(E^*)^n$ tq $\forall(k,j)\in[\![1,n]\!]^2,\varphi_k(e_j)=\delta_{k,j}=\begin{cases}1 \text{ si } k=j\\ 0 \text{ si } k\neq j\end{cases}$

$(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de E^*, la base duale de $\mathcal{B}$

$\forall v\in E,\quad v=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(v)e_j \qquad \forall\psi\in E^*,\ \psi=\sum_{j=1}^{n}\psi(e_j)\varphi_j$

$\mathcal{C}=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ base de $E^*\Rightarrow\exists!(e_1,\dots,e_n)$ de E dont $\mathcal{B}$ soit la base duale associée

Preuve : $\theta:v\mapsto(\varphi_1(v)\dots\varphi_n(v))$ isomorphisme : mm dim, surj (*si pas surj* $\Rightarrow\operatorname{Im}\theta\subset H_0\Rightarrow\mathcal{B}$ pas libre)

VI. Compléments et applications

$\mathcal{B}_0=(e_1,\dots,e_n)$ base de E $\quad\forall k\in[\![0,n]\!],F_k=Vect(e_1,\dots,e_k)$ $\quad F_0=\{0_E\}$

$p\leq n\quad(v_1,\dots,v_p)\in E^p$ tq $\forall k\in[\![1,p]\!]\ v_k\in F_k\setminus F_{k-1}$ $\quad (v_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est échelonnée : elle est libre

Une telle famille $(v_1,\dots,v_n)$ est une base ($\dim E=rg(v_n)_n=n$)

$(F_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ famille de *sev* tels que $\{0_E\}\subsetneq F_1\subsetneq\dots\subsetneq F_n$

$(v_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est échelonnée p/r aux $(F_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ $\quad v_k\in F_k\setminus F_{k-1}$ $\quad\Rightarrow(v_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre

E $\mathbb{K}-ev$ de dim n $\quad(\varphi_1,\dots,\varphi_s)\in(E^*)^s$ $\quad\forall j\in[\![1,s]\!],H_j=\ker\varphi_j$

$rg(\varphi_1,\dots,\varphi_s)=\dim E-\dim(H_1\cap\dots\cap H_s)$ $\qquad\psi\in Vect(\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ *ssi* $(H_1\cap\dots\cap H_s)\subset\ker\psi$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : $\begin{cases}u_0\in\mathbb{K},u_1\in\mathbb{K}\\ \forall n\in\mathbb{N},u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\end{cases}$ $\quad(a,b)\in\mathbb{K}^2$ fixés

$\mathcal{S}=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\forall n\in\mathbb{N},u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\}$ sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$\theta\begin{cases}\mathcal{S}\to\mathbb{K}^2\\ u\mapsto(u_0,u_1)\end{cases}$ est un isomorphisme $\Rightarrow\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{S}=2$

$(E_r):r^2-ar-b=0$ $\qquad$ 2 racines $r_1\neq r_2$: $\mathcal{S}=\left\{(\alpha r_1^n+\beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}},(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\right\}$

1 racine double r_0 : $\mathcal{S}=\left\{((\alpha+\beta n)r_0^n)_{n\in\mathbb{N}},(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\right\}$ $\qquad\left(r_0=\dfrac{a}{2}\right)$