Chap 17 : Développements limités

I. Introduction

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R}) \quad x_0 \in I \quad n \in \mathbb{N}$

Un développement limité à l'ordre n de f en x_0 est la donné d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = P_n(x-x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

$P_n(x-x_0)$ est la partie principale du développement limité

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors celui-ci est unique

f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 *ssi* f est continue en x_0

f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 *ssi* f est dérivable en x_0

Taylor-Young : f dérivable n fois en $x_0 \Rightarrow f$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \quad \left(\text{La réciproque est fausse pour } n \geq 2 : x^3 \sin\frac{1}{x}\right)$$

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors f admet un DL à l'ordre $k \in [\![0, n-1]\!]$

II. Opérations sur les développements limités

Si f est paire (définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0) et admet un DL à l'ordre n en 0 de $P.P.\ P_n(x)$, alors P_n est impaire et ne contient que des termes pairs

Si f et g admettent des DL à l'ordre en x_0, de parties principales respectives $P_n(x-x_0)$ et $Q_n(x-x_0)$

$\Rightarrow \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha f + \beta g)$ admet un DL à l'ordre n, de $PP : \alpha P_n(x-x_0) + \beta Q_n(x-x_0)$

$\Rightarrow fg$ admet un DL à l'ordre n en x_0 dont la partie principale est obtenue en tronquant $(P_n Q_n)(x-x_0)$ à l'ordre n

Si f admet un DL à l'ordre n en x_0 de P.P. $P_n(x-x_0)$,

et g admet un DL à l'ordre n en $y_0 = f(x_0)$ de P.P. $Q_n(y-y_0)$

$\Rightarrow g \circ f$ admet un DL à l'ordre x en x_0 dont la partie principale est obtenue en tronquant à l'ordre n $Q_n(P_n(x-x_0) - y_0)$

Si f admet un DL à l'ordre n en x_0 et $f(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{f}$ admet un DL à l'ordre n en x_0 obtenu en écrivant : $\displaystyle \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)} \times \frac{1}{1 + \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}}$

$$\left(\text{Composée du } DL \text{ de } \frac{1}{1+x} \text{ et de } \frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}\right)$$

$(f,g)\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ $x_0\in I$ $g(x)=o_{x\to x_0}(f(x))$ f ne s'annule qu'en x_0

Si F (resp G) est la primitive de f (resp g) s'annulant en x_0, alors $G(x)=o_{x\to x_0}(F(x))$

Preuve : croissance de l'intégrale et signe constant de f sur $[x,x_0]$

$f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ admettant un DL à l'ordre n en x_0. Soit F primitive de f

Alors F admet un DL à l'ordre $(n+1)$ en x_0 dont la partie principale est

la primitive de celle de f de terme constant nul

ON NE DERIVE PAS LES DEVELOPPEMENTS LIMITES

Soit f homéomorphisme de I sur J, admettant un DL à l'ordre n en x_0 (PP : $P_n(x-x_0)$),

supposons que f^{-1} admette un DL à l'ordre n en $y_0=f(x_0)\in J$ (PP : $Q_n(x-x_0)$)

$f^{-1}\circ f(x)=x\Rightarrow Q_n(P_n(X-x_0)-y_0)$ tronqué à l'ordre $n\Rightarrow X$ (Unicité du DL)

On connaît les DL des fonctions usuelles en 0

$\Rightarrow$ Pour $x_0\neq 0$, on pose $y=x-x_0$, on calcule de DL en $y=0$ de $f(x)=g(y)$

III. Développements limités utiles en 0 à l'ordre n

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n) \qquad \ln 1(+x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=0}^{k-1}(a-j)\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \qquad \sin(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{ch}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \qquad \mathrm{sh}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$$

(Inverser les signes p/r cos/sin)

$$\arcsin(x)=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{2^k k!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}) \qquad \arctan(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2})$$