Chap 16 : Fonctions convexes

I. Définition et premières caractérisations

$A \subset \mathbb{R}^n$ A est convexe si $\forall (M,N) \in A^2, [M,N] = \{(1-t)M + tN, t \in [0,1]\} \subset A$

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ f est convexe si $\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1]$ $f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$

f convexe $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in I^2$, sur $[x,y]$, la courbe est en-dessous de la corde

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ Epigraphe de f $\mathcal{E}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in I, y \ge f(x)\}$

f convexe *ssi* $\mathcal{E}_f$ partie convexe de $\mathbb{R}^2$

Preuve : $\leftarrow$ on prend la bordure

$\tau_a \begin{cases} I \setminus \{a\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$ f convexe *ssi* $\forall a \in I, \tau_a$ croissante sur $I \setminus \{a\}$

Preuve : $\rightarrow$ disjonction des cas : $x < a < y \Rightarrow t = \dfrac{a-x}{y-x}$ $a < x < y \Rightarrow t = \dfrac{x-a}{y-a}$... $\Leftarrow \tau_x(z) \le \tau_x(y)$...

$f \in \mathfrak{D}^1(I,\mathbb{R})$ f convexe *ssi* f' croissante sur I *ssi* $f'' \ge 0$ sur I

Preuve : $\rightarrow$ $f'(x) = \inf\{\tau_x(t), t \in I, t > x\}$ $f'(y) = \sup\{\tau_y(t), t \in I, t < y\}$ $f'(x) \le \tau_x(y) = \tau_y(x) \le f'(y)$

$\varphi : z \mapsto (1-t)f(x) + tf(z) - f((1-t)x+tz)$ φ' $\forall x \in I, \varphi(z) \ge 0 \Rightarrow \varphi(y) \ge 0 \Rightarrow f$ convexe

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ concave *ssi* son opposée est convexe

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$: f est strictement convexe si $\forall (x,y) \in I^2, x \ne y, \forall t \in]0,1[$, $f((1-t)x+ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$

$\Leftrightarrow (\tau_a)_{a \in I}$ strictements croissants $\Leftrightarrow$ Si f dérivable, f' strictement croissante

f convexe, g convexe et croissante $\Rightarrow g \circ f$ convexe

II. Inégalités de convexité

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ convexe $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,\dots,x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ $f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$

Si f strictement convexe, on a égalité *ssi* $x_1 = \dots = x_n$

Inégalité arithmético-géométrique : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ $\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j \ge \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$

Preuve : ln strictement concave,

$\lambda_j = \dfrac{1}{n}, \ln\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \ge \sum_{j=1}^n \lambda_j \ln(x_j)$; $\exp \nearrow \Rightarrow \sum_{j=1}^n \dfrac{1}{n} x_j \ge \exp\left(\sum_{j=1}^n \dfrac{1}{n} \ln x_j\right) = \prod_{j=1}^n x_j^{\frac{1}{n}}$