Chap 15 : Dérivation d'une fonction d'une variable réelle

I. Dérivabilité en un point

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ $\quad x_0 \in I$ $\quad f$ dérivable en x_0

$\Leftrightarrow \begin{cases} I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{cases}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0

$\Leftrightarrow$ Il existe $l \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ tel que $\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x-x_0)l + (x-x_0)\varepsilon(x), \lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0

f dérivable à gauche si $f_{\backslash]-\infty;x_0]}$ dérivable...

$\dot{I} = I \setminus \{\sup I, \inf I\}$

$f \in \mathfrak{F}(I,R)$ $\quad x_0 \in \dot{I}$ $\quad$ Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$

Preuve : dérivée à gauche supérieure à 0, dérivée à droite inférieure à 0

f et $g \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$, $x_0 \in I$, f et g dérivables en x_0, alors $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha f + \beta g$ dérivable en x_0

$\mathfrak{D}^1(I,\mathbb{R},x_0) = \{f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R}), f$ dérivable en $x_0\}$ sev de $\mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$

$\tau_{x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente la pente de la corde M_0M

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \tau_{x_0}(x)$ est la pente de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0

$(f,g) \in \mathfrak{D}^1(I,\mathbb{R},x_0)^2$

$\Rightarrow fg$ dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

$\Rightarrow$ (si f ne s'annule pas sur I) $\dfrac{1}{f}$ dérivable et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x_0) = \dfrac{-f'(x_0)}{f(x_0)^2}$

Preuves : produit : couper le produit en 2 parties

Dérivable → continu : inverse : $1/(f(x)f(x_0)) \to 1/(f(x_0))^2$

$\Rightarrow$ (si g ne s'annule pas sur I) $\dfrac{f}{g}$ dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

$\Rightarrow g\circ f$ dérivable en x_0 et $(g\circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'\circ f(x_0)$

Preuve : $\varphi : y \mapsto \dfrac{g(y) - g\circ f(x_0)}{y - f(x_0)}$ si $f(x_0) \neq y$, $y \mapsto g'(f(x_0))$ sinon

$\dfrac{g\circ f(x) - g\circ f(x_0)}{x-x_0} = \varphi(f(x)) \times \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\qquad$ Vérifier toutes les limites

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ strictement monotone, bijective de I sur J

f dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

II. Dérivation sur un intervalle

$\mathfrak{D}^1(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ dérivable sur $I\}$ sous-algèbre de $\mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$

$f' \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$ Les formules découlent de la dérivation en un point

f dérivable 1 fois en x_0 si f dérivable en x_0

f dérivable k fois en x_0 si $\begin{cases} f \text{ dérivable } (k-1) \text{ fois sur un voisinage de } x_0 \\ f^{(k-1)} \text{ dérivable en } x_0 \end{cases}$ $f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0)$

$\begin{cases} \mathfrak{D}^n(I,\mathbb{R}) \to \mathfrak{F}(I,\mathbb{R}) \\ f \mapsto f^{(n)} \end{cases}$ est linéaire

$f \in \mathfrak{D}^n(I,\mathbb{R})$ $g \in \mathfrak{D}^n(I,\mathbb{R})$ (pour $\mathfrak{D}^n(I,\mathbb{R},x_0)$, faire attention aux voisinages)

$\Rightarrow$ Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

$\Rightarrow$ Si f ne s'annule pas sur I : $\dfrac{1}{f} \in \mathfrak{D}^n(I,\mathbb{R})$

$\Rightarrow g \circ f \in \mathfrak{D}^n(I,\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Si f' ne s'annule pas sur I : f^{-1} dérivable n fois sur I

III. Etude globale

Théorème de Rolle : $\begin{cases} f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \\ f \in \mathfrak{D}^1(]a,b[,\mathbb{R}) \Rightarrow \exists c \in]a,b[, f'(c) = 0 \\ f(a) = f(b) \end{cases}$

Généralisations en $\pm\infty$

Théorème des accroissements finis : $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ $f \in \mathfrak{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$

$\exists c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Preuve : $A = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\varphi : x \mapsto f(x) - A(x-a)$ *Rolle*

$f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ $f \in \mathfrak{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$ $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]a,b[, m \leq f'(x) \leq M$

$\Rightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ $f \in \mathfrak{D}^1(\dot{I},\mathbb{R})$ $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \dot{I}, |f'(x)| \leq k$ $\Rightarrow f$ est k-lipschitzienne

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ $f \in \mathfrak{D}^1(\dot{I},\mathbb{R})$ f constante *ssi* $\forall x \in \dot{I}, f'(x)=0$

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ $f \in \mathfrak{D}^1(\dot{I},\mathbb{R})$ f croissante sur $\dot{I}$ *ssi* $\forall x \in \dot{I}, f'(x)\geq 0$

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ $f \in \mathfrak{D}^1(\dot{I},\mathbb{R})$ f strictement croissante sur $\dot{I}$ *ssi* $\forall x \in \dot{I}, f'(x)\geq 0$,
et f ne s'annule sur aucun intervalle non réduit à un point

Preuve : contraposées : non strictement croissante → s'annule sur un intervalle

IV. Formules de Taylor

Lemme de Rolle généralisé : f et $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ $g \in \mathfrak{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$ g ne s'annule pas sur $]a,b[$

$$\exists c \in]a,b[, \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Preuve : $A = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ $\varphi : x \mapsto (f(x)-f(a)) - A(g(x)-g(a))$ *Rolle*

Taylor Young : $x_0 \in I, n \in \mathbb{N}^*, f \in \mathfrak{D}^n(I,\mathbb{R},x_0)$

$$\exists \varepsilon \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R}), \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \qquad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{(x-x_0)^n \varepsilon(x)}_{=o(x-x_0)^n}$$

Preuve : $$A(x) = \frac{\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right) h(x)}{\left((x-x_0)^{n+1}\right) g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \qquad A(x) = \frac{h(x)-h(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \quad \textit{Rolle étendu}$$

Taylor-Lagrange (HP) : $f \in \mathfrak{D}^{n+1}(I,\mathbb{R})$

$$\forall x \in I, \exists c \in]x,x_0[\text{ ou }]x_0,x[, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Taylor avec reste intégral : $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}), x_0 \in I,$

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)d\ t$$

Inégalité de Taylor (Lagrange) : $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}), (x,x_0) \in I^2$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \times \sup_{\substack{[x,x_0]\\ ou[x_0,x]}} |f^{(n+1)}|$$ (preuve : T.R.I.)

V. Application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$

$f \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ $f(I) \subset I,$ $u_0 \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

Si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone. On obtient son sens avec $u_1 - u_0$

Si f est décroissante alors

$f^2 = f \circ f$ croissante sur I. Les suites $(u_{2n})_n$ et (u_{2n+1}) sont monotones

$g : x \mapsto f(x) - x$ strictement décroissante, si continue → unique point fixe x_0

$\Rightarrow$ séparation des intervalles de (u_{2n}) et (u_{2n+1})

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ $\quad f(I) \subset I$ $\quad (u_n)_n$ convergente vers $l \in I \Rightarrow f(l) = l$

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ $\quad f(I) \subset I = [a,b] \Rightarrow f$ admet un point fixe

$f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ $\quad f$ croissante $\quad f(I) \subset I = [a,b] \Rightarrow f$ admet un point fixe (preuve : comme TVI)

$[HP$, à éviter$]$: I fermé $([a,b][a;+\infty[;\mathbb{R}...)$ $\quad f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ $\quad f(I) \subset I$

f contractante $\Rightarrow$ point fixe $l \in I$ $\quad \forall (u_n)_n\ u_{n+1} = f(u_n)$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Preuve : Unicité : $|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ $\quad k < 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$rec \Rightarrow |u_{p+1} - u_p| \leq k^p |u_1 - u_0|$ $\quad |u_p - u_q| \leq \sum\limits_{j=p}^{q-1} |u_{j+1} - u_j| ... \Rightarrow$ de Cauchy $\quad \Rightarrow$ CV

f $k-$lipschitzienne $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$

Vitesse de convergence : $\delta_n = |u_n - l|$

$\delta_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ convergence linéaire

$\delta_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ convergence quadratique

$\delta_n = \mathcal{O}(k^n)$ $\quad (0 < k < 1)$ convergence exponentielle