Chap 14 : Espaces vectoriels (I)

I. Introduction

$\mathbb{K}-$*espace vectoriel* : ensemble E tel que :

$-(E,+)$ groupe commutatif (elt nt : 0_E)

$-(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,(x,y)\in E^2 \qquad \lambda\cdot(x+y)=\lambda x+\lambda y$

$(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$

$(\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$

$-1_{\mathbb{K}}\cdot x=x$

$0_{\mathbb{K}}\cdot x=0_E \qquad \lambda\cdot 0_E=0_E \qquad (-1)\cdot x=(-x) \quad \lambda\cdot x=0_E\Leftrightarrow\lambda=0_{\mathbb{K}}$ ou $x=0_E$

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}-esp\ vect$

$K\in\mathbb{K}$ sont 2 corps, $E\ \mathbb{K}-ev\Rightarrow E\ K-ev$

$F\ \mathbb{K}-ev\Rightarrow\mathfrak{F}(A,F)$ est un $\mathbb{K}-ev$

$E\ \mathbb{K}-ev, F\subset E$ sous-espace vectoriel

ssi F stable par $+$ et $\cdot$, et $(F,+,\cdot)\ \mathbb{K}-ev$

$$ssi\begin{cases}F\neq\varnothing\\ \forall(x,y)\in F^2,\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \quad \lambda\cdot x+\mu\cdot y\in F\end{cases}$$

$$ssi\begin{cases}F\neq\varnothing\\ \forall(x,y)\in F^2, & x+y\in F\\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\forall x\in F, & \lambda\cdot x\in F\end{cases} \quad ssi\begin{cases}F\neq\varnothing\\ \forall(x,y)\in F^2,\forall\lambda\in\mathbb{K}, \ \lambda\cdot x+y\in F\end{cases}$$

$$ssi\begin{cases}F\neq\varnothing\\ F \text{ stable par combinaison linéaire}\end{cases}$$

$(F_j)_{j\in J}$ famille de sev de E, $\bigcap_{j\in J}F_j$ sev de E FAUX pour l'union : $F\cup G$ sev $\Leftrightarrow F\subset G$ ou $G\subset F$

$A\subset E\Rightarrow$ Il existe un unique plus petit sous-espace vectoriel $Vect(A)$ contenant A :
c'est l'intersection de tous les sev contenant A.

Combinaison linéaire des $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\in E^n$: vecteur $v=\sum_{j=1}^n\lambda_jx_j$ avec $(\lambda_j)_j\in\mathbb{K}^n$ (somme FINIE)

$$Vect(A)=\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^n\lambda_jx_j, \qquad n\in\mathbb{N}^*(x_j)_j\in A^n,(\lambda_j)_j\in\mathbb{K}^n\right\}}_{F_0}$$

Preuve : $u=\sum_{j=1}^n\lambda_jx_j$ et $v=\sum_{j=1}^m\mu_jy_j$, on unifie les listes (unions) $\Rightarrow F_0$ sev

$A\in F_0 \ || \ A\subset F\Rightarrow F$ stable par CL $\Rightarrow F_0\subset F$

$F+G=\underbrace{\{u+v, \ \ u\in F,v\in G\}}_{H}$ est l'espace vectoriel engendré par $F\cup G$

$F \oplus G = E \Leftrightarrow \begin{cases} F+G=E \\ K \cap G = \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!(u,v) \in F \times G, x = u+v$

Preuve : $\Rightarrow v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 = u_2 - u_1 = 0_E \quad \Leftarrow x + 0_E = x = 0_E + x \Rightarrow x)0_E$

$(F_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ sev de E $\quad \forall x \in E, \exists!(u_1 ... u_n) \in F_1 \times ... F_n,\ x = \sum_{j=1}^{n} u_j \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 + ... + F_2 = E \\ \forall j \in [\![1,n]\!], F_j \cap \sum_{k \neq j} F_k = \{0_E\} \end{cases}$ $(preuve : idem)$

F_1 et F_2 en somme directe $\Leftrightarrow F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

II. Applications linéaires

E et F 2 $\mathbb{K}-ev$

$f \in \mathfrak{L}(E,F) \quad \Leftrightarrow \forall (u,v) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu g(v)$

$\Leftrightarrow f$ préserve les combinaisons linéaires

$\mathfrak{L}(E) = \mathfrak{L}(E,E) = \{endomorphismes\ de\ E\}$

$f \in \mathfrak{L}(E,F) \Rightarrow f$ morphisme de groupe

$\varphi \in \mathfrak{L}(E,F), \psi \in \mathfrak{L}(F,G), \psi \circ \varphi \in \mathfrak{L}(E,G)$

E_0 sev de $E \Rightarrow \varphi(E_0)$ sev de F $\qquad F_0$ sev de $F \Rightarrow \varphi^{-1}(F_0)$ sev de E

$\ker \varphi = \varphi^{-1}\{0_F\}$ sev de E $\qquad \varphi$ injective $ssi \ker \varphi = \{0_E\}$

$\varphi \in \mathfrak{L}(E,F)$ isomorphisme $\Leftrightarrow \varphi$ bijective, $\varphi^{-1} \in \mathfrak{L}(F,E)$

Automorphisme : isomorphisme de E vers E

Groupe linéaire : $Gl(E) = \{automorphismes$ de $E\}$

$(Gl(E), \circ)$ groupe (sous groupe de $(\mathfrak{S}, \circ)$, bijections de E dans E)

$\mathfrak{L}(E,F)$ sev de $\mathfrak{F}(E,F)$ $\qquad (\mathfrak{L}(E),+,\circ)$ anneau $\Rightarrow (\mathfrak{L}(E),+,\cdot,\circ)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre

Homothétie : $h_\lambda \begin{cases} E \to E \\ v \mapsto \lambda \cdot v \end{cases}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{K},\ h_\lambda \in \mathfrak{L}(E)$, isomorphisme ssi $\lambda \neq 0$

$F \oplus G = E, \varphi_1 \in \mathfrak{L}(F,H), \varphi_2 \in \mathfrak{L}(G,H) \Rightarrow \exists! \psi \in \mathfrak{L}(E,H) / \begin{cases} \psi_{\backslash F} = \varphi_1 \\ \psi_{\backslash G} = \varphi_2 \end{cases}$ $\qquad (\psi(u) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y))$

III. Projections et symétries

$F \oplus G = E$

Projection de F parallèlement à G : $p : \begin{cases} E = F \oplus G \to E \\ v = x + y \quad \mapsto x \end{cases}$ $\qquad p \in \mathfrak{L}(E)$

Projecteur : $p \in \mathfrak{L}(E), p \circ p = p$

Projection $\Leftrightarrow$ projecteur

$\Rightarrow$ Si p projection de F parallèment à G, $F \oplus G = E$, $\begin{cases} p \circ p = p \\ F = \operatorname{Im} p \\ G = \ker p \end{cases}$

$\Leftarrow$ Si p projecteur : $\begin{cases} \operatorname{Im} p + \ker p = E \\ p \text{ est la proj sur } \operatorname{Im} p \text{ parallèlement à } \ker p \end{cases}$

Preuve : $p \circ p = p \Rightarrow \operatorname{Im} p \cap \ker p = \{0_E\}$: $\quad v \in \ker p \Rightarrow 0_E = p(v) = p \circ p(u) = p(u) = v$

$v \in E, p(v) \in \operatorname{Im} p, u = p(v) + \underbrace{(v - p(v))}_{w} \quad p(w) = p(v) - p \circ p(v) = 0$

p_0 projection $\operatorname{Im} p //^t \ker p \Rightarrow p_{\backslash \operatorname{Im} p} = p_{0_{\backslash \operatorname{Im} p}}, p_{\backslash \ker p} = p_{\backslash \ker p}$

Symétrie de par rapport à F parallèlement à G : $s \begin{cases} E = F \oplus G \to E \\ v = x + y \mapsto x - y \end{cases}$

s est l'unique endomorphisme de E tel que $\begin{cases} s_{\backslash F} = Id_F \\ s_{\backslash G} = -Id_G \end{cases} \quad s = 2p - Id_E$

s symétrie $\Rightarrow \begin{cases} s \circ s = Id_E \\ F = \ker(s - Id_E) \\ G = \ker(s + Id_E) \end{cases}$

$s \circ s = Id_E \Rightarrow \begin{cases} \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E) = E \\ s \text{ symétrie par rapport à } \ker(s - Id_E) \text{ parallèlement à } \ker(s + Id_E) \end{cases}$

Preuve : $s \circ s = Id_E \Rightarrow F = \ker(s - Id_E), G = \ker(s + Id_E), \forall x \in F \cap G, s(v) = v, \ s(v) = -v \Rightarrow v = 0_E$

$x = \dfrac{v + s(v)}{2} \quad y = \dfrac{v - s(v)}{2} \quad v = x + y \Rightarrow s(x) = x \in F, s(y) = -y \in G \Rightarrow E = F \oplus G$

s_0 symétrie ... $\Rightarrow s = s_0$

$\ker(\psi \circ \varphi) \supset \ker \varphi$

$\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \operatorname{Im} \varphi$