Chap 13 : Fonctions d'une variable réelle

I. Généralités

$A \subset \mathbb{R}$ non vide

$(F(A,\mathbb{R}),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative :

$(F(A,\mathbb{R}),+,\times)$ anneau commutatif (non intègre) $(F(A,\mathbb{R}),\cdot)$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$B(A,\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions bornées de A dans $\mathbb{R}$, est une sous-algèbre de $F(A,\mathbb{R})$

Relation d'ordre partiel : $f \le g \Leftrightarrow \forall x \in A,\ f(x) \le f(y)$

$$\max(f,g) = \begin{cases} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \max(f(x), f(y)) \end{cases} = \sup\{f,g\}\ (\max\{f,g\} \text{ n'existe pas})$$

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \qquad \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

$f_+ : x \mapsto \max(f(x),0)$ partie positive

$f$paire $\Leftrightarrow \forall x,\ f(-x) = f(x)$

$$\forall f \in F(A,\mathbb{R}),\ \exists!(g,h) \in (F(A,\mathbb{R}))^2, \begin{cases} g \text{ paire, } h \text{ impaire} \\ g+h=f \end{cases} \qquad g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Preuve : existence OK, unicité : f = g + h = g' + h' → g – g' = h – h' paire et impaire à la fois → 0

$$f \in F(A,\mathbb{R}) \text{ T-périodique si } \begin{cases} A+T=A \\ f(x+T)=x \end{cases} \Rightarrow A+nT=A,\quad f(x+nT)=f(x)$$

Preuve : récurrence, montrer que pour (-1) ça marche (double inclusion)

$G_f = \{T \in \mathbb{R}^*,$ période de $f\} \cup \{0\}$ $\quad (G,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$

Soit $f \in (A,\mathbb{R})$ T-périodique : soit G_f est dense dans $\mathbb{R}$, soit $\exists! a \in \mathbb{R}_+^*, G_f = a\mathbb{Z}$

a est la (plus petite) période de f

II. Limites

I intervalle, $\overline{I} = [\inf(I), \sup(I)]$

Un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est une partie contenant un intervalle $]a-\delta, a+\delta[, \delta > 0$

Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle du type $]A,+\infty[$ $\quad (A \in \mathbb{R})$

Un voisinage de $a \in \overline{I}$ dans I est une partie contenant un intervalle $I \cap]a-\delta, a+\delta[$

$a \in \overline{I},\ l \in \mathbb{R},\ f$ converge vers l en a si :

$*a \in \mathbb{R}$: $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| \le \delta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon$

$*a = +\infty$: $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \ge A \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon$

Globalement : Quel que soit le voisinage V_0 de l, il existe un voisinage V de a dans I

tel que : $\forall x \in V, f(x) \in V_0 \quad \Leftrightarrow f(V) \subset V_0$

La limite est unique (*idem suites*)

f majorée par M $\Rightarrow$ limite inférieure à M

$\lim\limits_{x\to a} f = l > 0 \Rightarrow f$ majorée par constante $\frac{l}{2} > 0$ sur un voisinage de a

$$\begin{cases} f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$$

$F_{0,a}(I,\mathbb{R}) = \{f \in F(I,\mathbb{R}), \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $F(I,\mathbb{R})$

$\lim\limits_{a} f = 0$, g borné au voisinage de $a \Rightarrow \lim\limits_{a} fg = 0$

$\lim\limits_{a}(f+g) = \lim\limits_{a} f + \lim\limits_{a} g \qquad \lim\limits_{a}(f\times g) = \lim\limits_{a} f \times \lim\limits_{a} g$

Preuve : $f(x)g(x) - l_1 l_2 = \underbrace{g(x)}_{borné}\underbrace{(f(x)-l_1)}_{\to 0} - l_1\underbrace{(g(x)-l_2)}_{\to 0} \to 0$

$$\lim_{a} \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim\limits_{a} f}$$

Preuve : au voisinage de a : $\frac{1}{|f|} \le \frac{2}{|l|} \quad \frac{1}{f} - \frac{1}{l} = -\underbrace{\frac{1}{fl}}_{borné}(f-l)$

On dit que f tend vers $\pm\infty$ en $a \in \bar{I}$ si pour tout voisinage V_0 de $\pm\infty$, il existe un voisinage V de a tq $f(V) \subset V_0$

Si f tend vers $+\infty$ et g est minorée, $(f+g)$ et fg tendent vers $+\infty$

$f(I) \subset J, \lim\limits_{a} f = b \in \bar{J}, \lim\limits_{b} g = l \Rightarrow \quad \lim\limits_{a} g \circ f = l$

Preuve : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(I \cap [a-\delta, a+\delta]) \subset [b-\varepsilon, b+\varepsilon] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0, f(x_0) \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, J \cap [b-\varepsilon, b+\varepsilon] \ne \varnothing \Rightarrow b \in \bar{J}$. V_0 voisinage de $l \Rightarrow V_1$ voisinage de b dans J, $g(V_1 \cap J) \subset V_0$

V_1 voisinage de $b \Rightarrow V$ voisinage de a dans I, $f(V \cap I) \subset V_1$

$f \in F(I,\mathbb{R}) \qquad \lim\limits_{a} f = l \qquad \forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$

(Critère séquentiel) $\qquad f$ converge en $a \Leftrightarrow \forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a, (f(u_n))_n$ convergente

Preuve : → ok, ← : preuve de l'unicité de la limite des f(u_n) : lim f(u_n) ≠ lim f(v_n) → suite w_n avec termes pairs u_n termes impairs v_n → w_n converge vers a, donc f(w_n) converge aussi (hypothèse) → même limite

La suite : contraposée

III. Continuité

f est continue en $a \in I$ si elle admet une limite en a

$C^0(I,\mathbb{R},a) = \{f \in F(I,\mathbb{R})$ continue en $a\}$ est une sous-algèbre de $F(I,\mathbb{R})$

$a = \sup/\inf(I), \lim_{a} f = l, \exists! \tilde{f} \in C^0(I \cup \{a\}, \mathbb{R}, a)$

On dit que f est continue sur I intervalle si $\forall a \in I$, f continue en a

$C^0(I,\mathbb{R}) = \{f \in F(I,\mathbb{R}), f$ continue sur $I\}$ est une sous algèbre de $F(I,\mathbb{R})$

$f \in C^0(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f(I)$ est un intervalle

Preuve : on fixe γ dans [f(a), f(b)], on translate f de -γ, on pose A={x∈[a,b], g(x)≤0}, A est maj par b, il a un sup c≠b, on prend une suite cv vers c dans A, $\lim(g(u_n))=g(c)\leq 0$ fait par l'absurde pour montrer que g(c)=0

L'image par une fonction continue d'un segment est un segment

Preuve : maj : abs $\exists(x_n), f(x_n) \geq n$ $\quad a \leq x_n \leq b \quad \Rightarrow (x_{\varphi(n)})$ CV (BW) $\Rightarrow \lim f(x_{\varphi(n)}) = f(l) \Rightarrow p$
d borne sup f(x), suite (z_n) tq $f(z_n)$ CV vers d, sous suite CV vers l, f(l)=d

$f \in C^0(I,\mathbb{R}), f(I) \subset J, g \in C^0(J,\mathbb{R}) \Rightarrow g \circ f \in C^0(I,\mathbb{R})$

f k-lipschitzienne si $\forall (x,y) \in I^2, |f(x)-f(y)|, \leq k|x-y|$ $\quad \Rightarrow f$ continue sur I

f contractante si k-lipschitzienne, $k<1$
f k-lip sur I, g k'-lip sur J, $f(I) \subset J$, $g \circ f$ kk'-lip sur I

f uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, x_0) \in I^2, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

($\neq f$ continue : $\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$)
Négation de l'uniforme continuité : $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \delta$ et $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |x_n - y_n| \to 0, |f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$$

Théorème de *Heine* : Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue

Preuve : par l'absurde, suites $|x_n - y_n|$ -> 0, $|f(x_n)-f(y_n)|$>e, ss-suite cv, dans [a,b]

IV. Monotonie, limite et continuité

$f \in F(I,\mathbb{R})$ croissante sur I

Pour tout $a \in I \setminus \{\inf(I)\}$, f admet une limite à gauche $f(a^-)$ en a, $f(a^-) \leq f(a)$
Si $\beta = \sup(I)$, soit f est majorée, et admet une limite finie en β^-
soit $\lim_{\beta^-} f = +\infty$

$a < b \quad f(a) \leq f(a^+) \leq f(b^-) \leq f(b)$

Preuve : $A = \{f(x), x > a\}$ non minoré => $B \in \mathbb{R}, f(x_0) < B \quad F \nearrow \Rightarrow \forall x \in [a, x_0[, f(x) \leq f(x_0) < B$
A minorée $\Rightarrow \gamma = \inf(A)$, caractérisation de la borne inf
$(a,b) \in I^2, a < b \qquad c \in]a,b[\qquad f(b^-) \geq f(c) \quad f(a^-) \leq f(c)$...

f non continue en a ssi $f(a^+) > f(a)$ ou $f(a^-) < f(a)$
$f \in F(I,\mathbb{R})$ monotone sur I (intervalle) $\Rightarrow f$ continue *ssi* $f(I)$ intervalle

Preuve : contraposée (non continue => f(a+)>f(a-) : aucune valeur entre f(a+) et f(a-))

$f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ $\quad f$ injective *ssi* strictement monotone

Preuve : contraposée : a, b, c, d, f(a)≥f(b), f(c)≤f(d), TVI

$f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}) \quad J = f(I) \qquad f$ bijection de I dans J *ssi* strictement monotone

Homéomorphisme : f $\mathscr{C}^0$ et bij de I sur J, f^{-1} continue sur J
$f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}), \quad J = f(I)$, f bijective de I sur $J \Rightarrow f$ homéomorphisme

V. Relations de comparaison

$f(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x))$ si $|f(x)| \le M|g(x)|$ sur un voisinage de a
$f(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x)) \Leftrightarrow \exists \delta$ définie sur voisinage V de a, $\forall x \in V$, $f(x) = \delta(x)g(x)$, δ bornée

$f(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x)),\ h(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x)) \quad (\alpha f + \beta h)(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x)) \qquad + \qquad$ *transitivité*

$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists V$ voisinage de a, $\forall x \in V \cap I, |f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$
$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0$ définie sur voisinage V de a, $\forall x \in V$, $f(x) = \varepsilon_0(x)g(x)$, $\lim\limits_a \varepsilon_0 = 0$

$\alpha < \beta \quad x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta) \qquad x^\beta = \underset{x\to 0^+}{o}(x^\alpha)$

$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x)) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ $\quad$ relation d'équivalence
$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \exists \delta$ définie sur voisinage V de a, $\forall x \in V$, $f(x) = \delta(x)g(x)$, $\lim\limits_a \delta = 1$

$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2 \qquad \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \qquad$ *PAS +!*
$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad h(x) = \underset{x\to a}{o} g(x) \Rightarrow (f+h) \underset{a}{\sim} g$
$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad h(x) = \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x) \Rightarrow (f+h) \underset{a}{\sim} (\lambda+1)g \quad (\lambda \ne -1)$
$f(x) \underset{x\to a}{\sim} l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_a f = l$ $\qquad$ /!\ NE JAMAIS ECRIRE ~ 0 : cela signifie cst=0 à partir d'un certain rang /!\

VI. Fonctions à valeur complexe

On retrouve les mêmes propriétés en remplaçant les valeurs absolues par des modules, ou en n'étudiant que la partie réelle/complexe