Chap 12 : Suites réelles

I. Généralités

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n, u_n \in \mathbb{R}\} =$ {suites de termes réels}

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre : $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times)$ est un anneau commutatif (non intègre)

et $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

u est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

u croissante $\Leftrightarrow (\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2, k\leq n \Rightarrow u_k \leq u_n)$ u strict[t] croiss. $\Leftrightarrow (\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2, k<n \Leftrightarrow u_k < u_n)$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si $\exists M \in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n \leq M$

(u_n) est bornée *ssi* $\exists M \in \mathbb{R}_+, |u_n| \leq M$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornées$\}$

$(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}),+,\times)$ sous anneau, $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}),+,\cdot)$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

II. Limites

l est limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (en $+\infty$) si : $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N_0,\quad |u_n - l|\leq\varepsilon$

La limite est unique (preuve : prendre $\varepsilon = |l_1 - l_2|/3$)

Toute suite convergente est bornée (preuve : $\varepsilon = 1$, valeurs avant n_0 : borné)

N'utiliser la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ que si on a déjà montré que cette limite existe

$\mathcal{E}_0 = \{u=(u_n), \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel : $\forall (u,v)\in\mathcal{E}_0{}^2, \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}, \alpha u+\beta v\in\mathcal{E}_0$

Pour tout $u\in\mathcal{E}_0, v\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), (uv)\in\mathcal{E}_0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l_1 l_2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l}$

Preuve : utiliser ce qui précède. $n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \dfrac{|l|}{2}$ $|u_n| \geq |l| - |u_n - l| \geq \dfrac{|l|}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{u_n}\right| \leq \dfrac{2}{|l|}$: *borné ...*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes, et $\forall n, u_n\leq v_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ (pr : contr. : $l_1 \geq l_2$, $\varepsilon = (l_1 - l_2)/3$)

$v_n \leq u_n \leq w_n, v_n$ et $w_n \Rightarrow$ mêmes limites $\Rightarrow$ même limite pour u

Les inégalités STRICTES NE PASSENT PAS à la limite

III. Limites infinies

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, u_n \geq A$ Une telle suite n'est pas bornée, ni convergente

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty \quad \left(\varepsilon = \dfrac{1}{A}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, v minorée $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$

IV. Résultats d'existence de limites

Suite extraite : $v = (u_{\varphi(n)})$, φ strictement croissante ($\Rightarrow \varphi(n) \geq n$)

$w = (v_{\psi(n)}) = (u_{\varphi\circ\psi(n)})$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $\forall \varphi$, $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$

Moyenne de Césaro : $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ Si $\lim_{n\to+\infty} u_k = l$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = l$

Preuve : lim finie : séparer la somme : valeurs pour n<N_0, et valeurs pour N>n_0 (epsilon/2 de chaque coté).
Si lim infinie : A_0 = 2A + 1

u suite croissante : Soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Soit u est bornée et converge vers $\sup\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$

u et v adjacentes si : u croissante, v décroissante, $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

u et v adjacentes $\Rightarrow u_n \leq v_n$ (preuve par l'absurde), et u et v convergent vers la même limite.

Un segment est un intervalle $[a,b]$ $(a \leq b)$

(I_n) suite de segments emboités $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$ Si $long(I_n) \to 0$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$

Preuve : $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ $(a_n)\nearrow maj\ (b_n)\searrow \min$, $\lim a_n \leq \lim b_n$, $dble\, inclusion$

Dichotomie : 2 suites réelles (a_n) et (b_n), division par 2 des intervalles $[a_n, b_n]$ selon la moitié où α se trouve

$a_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ $b_n = \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = x$

Preuve : $(a_n)\nearrow : a_{n+1} - a_n \geq 0$ $(b_n)\searrow : b_{n+1} - b_n \leq 0$

Ecriture décimale : $u_n = E(10 x_n)$ $x_{n+1} = 10x_n - u_{n+1}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{10^k} = x$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{10^k}$ pour les décimaux : constante égale à 0 à partir d'un rang n_0

Preuve : Récurrence : $x = a_n + 10^n x_n$

Bolzano-Weierstrass : toute suite u bornée admet une sous-suite qui converge

Preuve : dichotomie

V. Relations de comparaison

u est dominée par v ($u_n = O(v_n)$) si $\exists M \in \mathbb{R}_+$ et $N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n| \leq M|v_n|$

$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \exists (w_n)$ et $n_0 \in \mathbb{N}, (w_n)$ bornée, $\forall n \geq n_0, u_n = w_n v_n \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée

$u_n = O(w_n) \quad v_n = O(w_n) \Rightarrow \alpha u_n + \beta v_n = O(w_n)$

$u_n = O(v_n) \quad v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n = O(w_n)$

u est négligeable devant v ($u_n = o(v_n)$) si $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$

$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \exists (\varepsilon_n)$ et $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = \varepsilon_n v_n, \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n \to 0$

$u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n) \qquad u_n = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$u_n = o(v_n) \quad v_n = O(w_n)$ (ou l'inverse) $\Rightarrow u_n = o(w_n)$

$u_n = o(w_n) \quad v_n = o(w_n) \Rightarrow \alpha u_n + \beta v_n = o(w_n)$

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n) \Leftrightarrow \forall n \geq n_\varepsilon,\ u_n = \alpha_n v_n,\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

$\sim$ relation d'équivalence compatible avec $\times$ et $/$ (PAS AVEC $+$!)

$u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = O(v_n) \quad v_n = O(u_n)$

Si $u_n \sim v_n, \alpha_n = o(v_n) \Rightarrow (u_n + \alpha_n) \sim v_n$

$u_n = \sum_{j=0}^{d} a_j n^j \quad \sum_{j=0}^{d-1} a_j n^j = o(n^d) \Rightarrow u_n \sim a_d n^d$

$u_n \sim \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \qquad (u_n \sim 0 \Leftrightarrow u_n$ est nulle à partir d'un certain rang)

$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta) \qquad n^\alpha = o(e^{\alpha n}) \qquad a > 1 : n^\alpha = o(a^n) \qquad a^n = o(n!) \qquad n! = o(n^n)$

VI. Suites à valeurs complexes

Pareil, avec modules à la place des valeurs absolues, et sans relation d'ordre. Limites → parties réelles et imaginaires

VII. Compléments

A dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y$

Suite géométrique : $u_{n+1} = a u_n \qquad \sum_{k=p}^{q} a^k = a^p \frac{1 - a^{q-p+1}}{1-a} \qquad$ Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + a$

Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = a u_n + b \qquad f \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az + b \end{cases}$ similitude directe $\Rightarrow \omega = \frac{b}{1-a}$

$f(z) - \omega = a(z - \omega) \qquad v_n = u_n - \omega \qquad u_{n+1} = a v_n \ldots$

Suites homographiques : $u_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d} \qquad$ Point fixe : $cz^2 + (d-a)z - b = 0$

2 racines : $v_n = \frac{u_n - \lambda}{u_n - \mu} \Rightarrow géom \qquad$ 1 racine : $\lambda = \frac{a-d}{2c} \qquad v_n = \frac{1}{u_n - \lambda}$

Lemme de l'escalier : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = h$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = h$