Chap 11 : Corps des réels

I. Corps des rationnels

$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$

Corps de fractions : $\overline{(a,b)}\in\mathbb{K}$: $\overline{(a,b)}=\{(x,y)\in A,(a,b)\sim(x,y)\}$

$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(ad+bc,bd)}$ $\quad\overline{(a,b)}\times\overline{(c,d)}=\overline{(ab,cd)}$

$(\mathbb{Q},+,\times)$ unique corps de fraction contenant $\mathbb{Z}$ $\qquad\le$ ordre total sur $\mathbb{Q}$

Une partie majorée de $\mathbb{Q}$ n'a pas forcément de plus grand élément

Une partie majorée de $\mathbb{Q}$ n'a même pas forcément de borne supérieure : $\{r\in\mathbb{Q},r^2\le 2\}$

$\mathbb{N},\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont archimédiens : $\forall a\in A,\forall\varepsilon\in A_+,\exists n\in\mathbb{N},n\varepsilon>a$

II. Corps des réels

$\mathbb{R}$ unique corps :
- Contenant $\mathbb{Q}$
- Totalement ordonné
- Archimédien
- Vérifiant la propriété de la borne supérieure

Constructions : Suites de Cauchy ou Coupures de Dedekind

$||x|-|y||\le|x+y|\le|x|+|y|$

Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

$$A\subset\mathbb{R}\quad M=\sup(A)\Leftrightarrow\begin{cases}M \text{ majore } A\\ \forall m\in\mathbb{R},m<M\Rightarrow\exists a\in A,a>m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall a\in A,a\le M\\ \forall\varepsilon>0,\exists a\in A,M-\varepsilon\le a\end{cases}$$

III. Partie entière et applications

$\forall x\in\mathbb{R},\exists! n\in\mathbb{Z}$ tq $n\le x<n+1$ $\qquad n=E(x)=\lfloor x\rfloor$

Preuve : $(x\in\mathbb{R}_+)$ $\quad A=\{k\in\mathbb{N},k\le x\}$ $\quad\mathbb{R}$ archi $\Rightarrow\exists n_0/n_0\times 1>x$ $\qquad n_0$ maj A $\Rightarrow$ n +gd elt : OK

$x\mapsto E(x)$ croissante $\qquad E(x+n)=E(x)+n$ $\qquad n\le x\Rightarrow n\le E(x)$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\exists r\in\mathbb{Q},\quad a<r<b$

Preuve : $a<b$ $\quad\mathbb{R}$ archi $\Rightarrow\exists q\in\mathbb{N}^*,1\times q>\frac{1}{b-a}$ $\qquad p=E(qa+1)$ $\quad\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\le a<\frac{p}{q}<b$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve : utiliser $a-\sqrt{2}$ (a rationnel)

IV. Intervalles

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ $\qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ $\qquad (a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Convexe de $\mathbb{R}^n$: $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si, pour tout $(M,N) \in A^2, [M,N] \in A \; (\forall t \in [0,1], tM + (1-t)N \in A)$

Convexe de $\mathbb{R}$: $a \leq b \;\; [a,b] = \{(1-t)a + tb, \;\; t \in [0,1]\}$

Preuve : $a \leq b \Rightarrow (1-t)a \leq (1-t)b \Rightarrow (1-t)a + tb \leq b \quad | \qquad x \in [a,b] \qquad t = \dfrac{x-a}{b-a}$

Les parties convexes (non vides) de $\mathbb{R}$ sont des intervalles

Preuve : $(x,y) \in [a,b] \quad a \leq x \leq (1-t)x + ty \leq ty \leq b$

A convexe, $\beta = \sup(A) \qquad \alpha = \min(A)$ Au cas par cas

$x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta \Rightarrow x = (1-t)\alpha + t\beta \Rightarrow x \in A$

$A \subset \mathbb{R} \;\; \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b, \quad \exists x \in]a,b[\cap A$

$\Leftrightarrow \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \;\; |x-a| < \varepsilon$

Preuve : $\exists x \in A, x]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\qquad \varepsilon = \dfrac{b-a}{2}, \alpha = \dfrac{b+a}{2} \qquad]a,b[=]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$