

Chap 1 : Ensembles et applications

I. Ensembles

Notion intuitive d'ensemble : un ensemble est défini par les éléments qui le constituent

Ensembles égaux \Leftrightarrow Exactly les mêmes éléments

E, F ensembles $E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$

Une partie (ou sous-ensemble) de E est un ensemble A inclus dans E

E ensemble $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble constitué des parties de E

$E = \{x, y\} \quad x \in E \quad \{x\} \in \mathcal{P}(E) \quad \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$

E ensemble $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset A$

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, (A \subset B) \text{ et } (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C) \quad (A \subset B) \text{ et } (B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$

E ensemble, \mathcal{A} assertion de E

$F = \{x \in E, \mathcal{A}(x)\}$ est l'unique partie de E constituée d'éléments tels que \mathcal{A} est vraie

$A \subset E$ ensemble Le complémentaire de A dans E , noté $E \setminus A, C_E(A)$ ou \bar{A} est : $E \setminus A = \{x \in E, \text{non}(x \in A)\}$

A, B deux parties de E L'union de A et B : $A \cup B = \{x \in E, (x \in A) \text{ OU } (x \in B)\}$

L'intersection de A et B : $A \cap B = \{x \in E, (x \in A) \text{ ET } (x \in B)\}$

$A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset (A \cup B) \quad B \subset (A \cup B) \quad (A \cap B) \subset A \quad (A \cap B) \subset B$

$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \quad A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \quad E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

$(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ La différence symétrique $A \Delta B = \{x \in E, (x \in A \text{ ET } x \notin B) \text{ OU } (x \notin A \text{ ET } x \in B)\}$

$= (A \cap (E \setminus B)) \cup (B \cap (E \setminus A))$

$x \in E, y \in F$ Le couple $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad /!\ \{x, y\} = \{y, x\}$ MAIS $(x, y) \neq (y, x)$

Le produit cartésien de E et F (ensembles) : $E \times F = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$

II. Applications

E et F 2 ens. Une relation \mathcal{R} entre E et F est la donnée d'une partie $\mathcal{S} \subset E \times F$ (graphe de la relation \mathcal{R})

Pour tout $x \in E, y \in F, (x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{S}$

Une application de E vers F est une relation \mathcal{R} entre E et F telle que : $(\forall x \in E, \exists ! y \in F, x \mathcal{R} y)$

f application de E vers $F \quad \forall x \in E, \text{ on note l'image de } x \text{ par } f : y = f(x), \text{ l'unique } y \in F \text{ tel que } (x f y)$

Le graphe de f est $\{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\}$

$\forall y \in F, \text{ si } y = f(x) \text{ avec } x \in E, x \text{ est un antécédent de } y \text{ par } f$

$\mathcal{F}(E, F)$ est l'ensemble des applications de E (espace de départ) vers F (espace d'arrivée)

f et g deux applications $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{même ensemble de départ } E, \text{ même ensemble d'arrivée} \\ \forall x \in E, f(x) = g(x) \end{cases}$

E, F, G 3 ens. $f \in \mathcal{F}(E, F), g \in \mathcal{F}(F, G)$ L'application composée $g \circ f \begin{cases} E \rightarrow G \\ x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{cases}$

E, F, G, H 4 ens. $f \in \mathcal{F}(E, F), g \in \mathcal{F}(F, G), h \in \mathcal{F}(G, H)$ $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

E ensemble, l'application identité $Id_E \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{cases}$

E et F deux ens. $\forall f \in \mathcal{F}(E, F), f \circ Id_E = f \quad Id_F \circ f = f$

Soient E et F deux ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On a équivalence entre :

- (i) $\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- (ii) Pour tout $y \in F$, il existe au plus un $x \in E$ tel que $f(x) = y$
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution
- (iv) Pour tout $(x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

On dit alors que f est injective / une injection de E dans F

La composée de deux fonctions injectives est injective

Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

Preuves : 1 \rightarrow remonter les fonctions 2 \rightarrow composer par g , et remonter directement à x (unique)

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On a équivalence entre :

- (i) Pour tout $y \in F$, il existe au moins un $x \in E$ tel que $y = f(x)$
- (ii) Pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution dans E

On dit alors que f est surjective / une surjection de E dans F

La composée de deux fonctions surjectives est surjective

Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

$f \in \mathcal{F}(E, F), A \subset E$ La restriction de f à A est l'application : $f|_A \begin{cases} A \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

E_0 tel que $E \subset E_0$ Le prolongement de f à E_0 est une application $\tilde{f} \in \mathcal{F}(E_0, F)$ tel que $\tilde{f}|_E = f$

La restriction conserve l'injectivité mais pas la surjectivité : $G \subset E, f \text{ inj} \Rightarrow f|_G \text{ inj} \quad f \text{ surj} \not\Rightarrow f|_G \text{ surj}$

Le prolongement conserve la surjectivité mais pas l'injectivité

Une application bijective de E dans F est surjective et injective de E dans F :

Chaque élément de E a une seule image dans F . Chaque élément de F a un seul antécédent dans E .

La composée de deux fonctions bijective est bijective.

Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Inverse à gauche	$\Leftrightarrow g \circ f = Id_E$	$\Leftrightarrow f$ injective
Inverse à droite	$\Leftrightarrow f \circ h = Id_E$	$\Leftrightarrow f$ surjective
Inverse	$\Leftrightarrow g \circ f = f \circ h = Id_E$	$g = h = f^{-1}$ unique $\Leftrightarrow f$ bijective

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve : $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_E$

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \quad f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \quad /!\ \text{Concerne des PARTIES de } E \ /!\$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$f(f^{-1}(B)) \subset B \quad f^{-1}(f(A)) \supset A$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F): \quad f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

$$f^{-1}(f(A)) = A \Leftrightarrow f \text{ injective}$$

Preuve : aller \rightarrow singletons Aller 2 \rightarrow y dans f(E)...

I, E ensembles non vides Une famille d'éléments de E indexée par I est une application :

$$s \begin{cases} F \rightarrow E \\ i \mapsto s(i) = s_i \in E \end{cases} \quad \text{On note } s = (s_i)_{i \in I}, \text{ et } E^I = \{\text{familles d'éléments de } E \text{ indexées par } I\}$$

E_0 ensemble et I ensemble non vide. On considère $(A_i)_{i \in I}$ avec pour tout $i \in I, A_i \in \mathcal{P}(E_0)$

$$\text{On note : } \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E_0, \exists i \in I, x \in A_i\} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E_0, \forall i \in I, x \in A_i\}$$

III. LCI

Lois de Composition Interne : Application de $E \times E$ dans E : $\begin{cases} E \times E \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x * y \end{cases}$

Associativité : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (z * y)$

Élément neutre e : $\forall x \in E, x * e = e * x = x$ (unique s'il existe)

Inverse z de $x \in E$: $x * z = z * x = e$ (unique s'il existe)

Distributivité de $*$ sur \oplus : $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad x * (y \oplus z) = (x * y) \oplus (x * z)$

Groupe : $(E, *)$: $*$ associative, admet un élément neutre, admet un inverse pour tout $x \in E$

$$\mathcal{S}(E) = \{f \in \mathcal{F}(E, E) \text{ bijective}\} \quad (\mathcal{S}(E), \circ) \text{ est un groupe}$$

IV. Relation d'ordre et d'équivalence

\mathcal{R} est une relation sur E (entre E et E)

Réflexivité :	$\forall x, x \mathcal{R} x$	Symétrie :	$\forall (x, y), x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$
Transitivité :	$\forall (x, y), x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$	Antisymétrie :	$\forall (x, y), x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$

Relation d'équivalence : Réflexive, transitive, **symétrique** ($=, \equiv$)

Relation d'ordre : Réflexive, transitive, **antisymétrique** (\leq, \subset)

Partition : Parties non vides, disjointes, dont l'union donne l'ensemble entier

Classe d'équivalence : $\bar{x} = [x] = \{y \in E, x \mathcal{R} y\}$

Famille des classes d'équivalence \rightarrow partition de E

Preuve : Non vide, l'union forme E (Réflexivité $\rightarrow x \in \bar{x}$)

L'intersection est vide : si inter pas vide, alors égalité (Transitivité, symétrie, double inclusion)

Une famille de représentants est la donnée d'un élément par classe d'équivalence

Ordre total (\leq) : $\forall (x, y) \in E^2$, on a $(x \mathcal{R} y) \text{ OU } (y \mathcal{R} x)$ (càd x et y sont toujours en relation)

Sinon, l'ordre est dit partiel : $<$)

Majorant M : $\forall x \in A, x \mathcal{R} M$ (penser à \leq)

Minorant m : $\forall x \in A, m \mathcal{R} x$

Si $\exists M \in A$ majorant de A, $M = \max(A)$ est le plus grand élément de A (unique s'il existe)

Si $\exists m \in A$ minorant de A, $m = \min(A)$ est plus petit élément de A (unique s'il existe)

$x \in E$ est borne supérieure de $A \subset E$ pour \mathcal{R} relation d'ordre sur E

s'il est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A : $x = \sup(A) = \min\{\text{majorants de A}\}$

$x \in E$ est borne inférieure de $A \subset E$ pour \mathcal{R} relation d'ordre sur E

s'il est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A : $x = \inf(A) = \max\{\text{minorants de A}\}$

S'il existe $M = \max(A)$, alors $M = \sup(A)$

S'il existe $m = \min(A)$, alors $m = \inf(A)$

$A \in E, \forall M \in E, M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ majorant de } A \\ \forall z \in E, z \text{ majorant de } A \Rightarrow M \mathcal{R} z \end{cases}$

Caractérisation du sup/inf pour un ORDRE TOTAL : E ensemble muni d'un ordre total \leq

On notera : $\forall (x, y) \in E^2, (x < y) \Leftrightarrow (x \leq y) \text{ ET } (x \neq y)$

$A \in E, M \in E$. On a : $M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ majorant de } A \\ \forall z \in E, (z < M) \Rightarrow (\exists x \in A, z < x) \end{cases}$

(pour un ordre total, on peut toujours trouver un élément de $A \neq z$ entre $z \in A$ et sa borne sup)