Chap 1 : Ensembles et applications

I. Ensembles

Notion intuitive d'ensemble : un ensemble est défini par les éléments qui le constituent

Ensembles égaux $\Leftrightarrow$ Exactement les mêmes éléments

E, F ensembles $\quad E \subset F \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, x \in F$

Une partie (ou sous-ensemble) de E est un ensemble A inclus dans E

E ensemble $\quad \mathcal{P}(E)$ est l'ensemble constitué des parties de E

$E = \{x, y\} \qquad x \in E \quad \{x\} \in \mathcal{P}(E) \qquad \mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$

E ensemble $\quad \forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset A$

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, \quad (A \subset B)$ et $(B \subset C) \Rightarrow (A \subset C) \qquad (A \subset B)$ et $(B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$

E ensemble, $\mathcal{A}$ assertion de E

$F = \{x \in E, \mathcal{A}(x)\}$ est l'unique partie de E constituée d'éléments tels que $\mathcal{A}$ est vraie

$A \subset E$ ensemble $\quad$ Le complémentaire de A dans E, noté $E \setminus A, C_E(A)$ ou $\overline{A}$ est : $E \setminus A = \{x \in E, non(x \in A)\}$

A, B deux parties de E $\quad$ L'union de A et B : $\quad A \cup B = \{x \in E, (x \in A)$ OU $(x \in B)\}$

L'intersection de A et B : $\quad A \cap B = \{x \in E, (x \in A)$ ET $(x \in B)\}$

$A, B \in \mathcal{P}(E) \qquad A \subset (A \cup B) \quad B \subset (A \cup B) \qquad (A \cap B) \subset A \quad (A \cap B) \subset B$

$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup (A \cup C) \qquad A \cap -B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \qquad E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

$(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ La différence symétrique $A \Delta B = \{x \in E, (x \in A$ ET $x \notin B)$ OU $(x \notin A$ ET $x \in B)\}$

$= (A \cap (E \setminus B)) \cup (B \cap (E \setminus A))$

$x \in E, y \in F \quad$ Le couple $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \qquad$ /!\ $\{x, y\} = \{y, x\}$ MAIS $(x, y) \neq (y, x)$

Leproduit cartésien de E et F (ensembles) : $E \times F = \{(x, y), x \in E$ et $y \in F\}$

II. Applications

E et F 2 ens. $\quad$ Une relation $\mathcal{R}$ entre E et F est la donnée d'une partie $\mathcal{G} \subset E \times F$ (graphe de la relation $\mathcal{R}$)

Pour tout $x \in E, y \in F$, $(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{G}$

Une application de E vers F est une relation $\mathcal{R}$ entre E et F telle que : $(\forall x \in E, \exists! y \in F, x \mathcal{R} y)$

f application de E vers $F \qquad \forall x \in E$, on note l'image de x par f : $y = f(x)$, l'unique $y \in F$ tel que (xfy)

Le graphe de f est $\{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\}$

$\forall y \in F$, si $y = f(x)$ avec $x \in E$, x est un antécédent de y par f

$\mathcal{F}(E, F)$ est l'ensemble des applications de E (espace de départ) vers F (espace d'arrivée)

f et g deux applications $\quad f = g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{même ensemble de départ } E, \text{ même ensemble d'arrivée} \\ \forall x \in E,\ f(x) = g(x) \end{cases}$

E, F, G 3 ens. $f \in \mathfrak{F}(E,F), g \in \mathfrak{F}(F,G)$ $\quad$ L'application composée $g \circ f \begin{cases} E \to G \\ x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{cases}$

E, F, G, H 4 ens. $f \in \mathfrak{F}(E,F), g \in \mathfrak{F}(F,G), h \in \mathfrak{F}(G,H)$ $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

E ensemble, l'application identité $Id_E \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$

E et F deux ens. $\quad \forall f \in \mathfrak{F}(E,F),\ \ f \circ Id_E = f \quad Id_F \circ f = f$

Soient E et F deux ensembles, $f \in \mathfrak{F}(E,F)$. On a équivalence entre :

(i) $\quad \forall (x,y) \in E^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(ii) $\quad$ Pour tout $y \in F$, il existe au plus un $x \in E$ tel que $f(x) = y$

(iii) $\quad$ Pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution

(iv) $\quad$ Pour tout $(x,y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

On dit alors que f est injective / une injection de E dans F

La composée de deux fonctions injectives est injective
Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

Preuves : 1 → remonter les fonctions $\quad$ 2 → composer par g, et remonter directement à x (unique)

Soit $f \in \mathfrak{F}(E,F)$. On a équivalence entre :

(i) $\quad$ Pour tout $y \in F$, il existe au moins un $x \in E$ tel que $y = f(x)$

(ii) $\quad$ Pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution dans E

On dit alors que f est surjective / une surjection de E dans F

La composée de deux fonctions surjectives est surjective
Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

$f \in \mathfrak{F}(E,F), A \subset E$ $\quad$ La restriction de f à A est l'application : $f_{\backslash A} \begin{cases} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

E_0 tel que $E \subset E_0$ $\quad$ Le prolongement de f à E_0 est une application $\tilde{f} \in \mathfrak{F}(E_0, F)$ tel que $\tilde{f}_{\backslash E} = f$

La restriction conserve l'injectivité mais pas la surjectivité : $G \subset E$, f inj $\Rightarrow f_{\backslash G}$ inj f surj $\cancel{\Rightarrow} f_{\backslash G}$ surj

Le prolongement conserve la surjectivité mais pas l'injectivité

Une application bijective de E dans F est surjective et injective de E dans F :
Chaque élément de E a une seule image dans F. Chaque élément de F a un seul antécédent dans E.

La composée de deux fonctions bijective est bijective.
Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Inverse à gauche $\Leftrightarrow g \circ f = Id_E$ $\Leftrightarrow f$ injective
Inverse à droite $\Leftrightarrow f \circ h = Id_E$ $\Leftrightarrow f$ surjective
Inverse $\Leftrightarrow g \circ f = f \circ h = Id_E$ $g = h = f^{-1}$ unique $\Leftrightarrow f$ bijective

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Preuve : $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_E$

$f(A) = \{f(x), x \in A\}$ $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$ /!\ Concerne des PARTIES de E /!\

$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

$f(f^{-1}(B)) \subset B$ $f^{-1}(f(A)) \supset A$
$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$: $f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow f$ surjective
$f^{-1}(f(A)) = A \Leftrightarrow f$ injective

Preuve : aller → singletons Aller 2 → y dans f(E)…

I, E ensembles non vides Une famille d'éléments de E indexée par I est une application :

$$s \begin{cases} F \to E \\ i \mapsto s(i) = s_i \in E \end{cases}$$

On note $s = (s_i)_{i \in I}$, et $E^I = \{$familles d'éléments de E indexées par $I\}$

E_0 ensemble et I ensemble non vide. On considère $(A_i)_{i \in I}$ avec pour tout $i \in I, A_i \in \mathcal{P}(E_0)$

On note : $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E_0, \exists i \in I, x \in A_i\}$ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E_0, \forall i \in I, x \in A_i\}$

III. LCI

Lois de Composition Interne : Application de $E \times E$ dans E : $\begin{cases} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x * y \end{cases}$

Associativité : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (z * y)$
Elément neutre e : $\forall x \in E,$ $x * e = e * x = x$ (unique s'il existe)
Inverse z de $x \in E$: $x * z = z * x = e$ (unique s'il existe)
Distributivité de * sur $\oplus$: $\forall (x, y, z) \in E^3$ $x * (y \oplus z) = (x * y) \oplus (x * z)$
Groupe : $(E, *)$: * associative, admet un élément neutre, admet un inverse pour tout $x \in E$

$\mathcal{S}(E) = \{f \in \mathcal{F}(E, E)$ bijective$\}$ $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est un groupe

IV. Relation d'ordre et d'équivalence

$\mathcal{R}$ est une relation sur E (entre E et E)

Réflexivité : $\forall x,$ $x \mathcal{R} x$ Symétrie : $\forall (x, y), x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$
Transitivité : $\forall (x, y), x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$ Antisymétrie : $\forall (x, y), x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$

Relation d'équivalence : Réflexive, transitive, **symétrique** $(=,\equiv)$

Relation d'ordre : Réflexive, transitive, **antisymétrique** $(\leq,\subset)$

Partition : Parties non vides, disjointes, dont l'union donne l'ensemble entier

Classe d'équivalence : $\bar{x}=[x]=\{y\in E, x\Re y\}$

Famille des classes d'équivalence → partition de E

Preuve : Non vide, l'union forme E (Réflexivité → $x\in\bar{x}$)

L'intersection est vide : si inter pas vide, alors égalité (Transitivité, symétrie, double inclusion)

Une famille de représentants est la donnée d'un élément par classe d'équivalence

Ordre total $(\leq)$: $\forall(x,y)\in E^2$, on a $(x\Re y)OU\,(y\Re x)$ (càd x et y sont toujours en relation

Sinon, l'ordre est dit partiel : <)

Majorant M : $\forall x\in A, x\Re M$ (penser à $\leq$)

Minorant m : $\forall x\in A, m\Re x$

Si $\exists M\in A$ majorant de $A, M=\max(A)$ est le plus grand élément de A (unique s'il existe)

Si $\exists m\in A$ minorant de A, $m=\min(A)$ est plus petit élément de A (unique s'il existe)

$x\in E$ est borne supérieure de $A\subset E$ pour $\Re$ relation d'ordre sur E

s'il est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A : $x=\sup(A)=\min\{\text{majorants de } A\}$

$x\in E$ est borne inférieure de $A\subset E$ pour $\Re$ relation d'ordre sur E

s'il est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A : $x=\inf(A)=\max\{\text{minorants de } A\}$

S'il existe $M=\max(A)$, alors $M=\sup(A)$ S'il existe $m=\min(A)$, alors $m=\inf(A)$

$$A\in E,\ \forall M\in E,\qquad M=\sup(A)\Leftrightarrow\begin{cases}M \text{ majorant de } A\\ \forall z\in E,\ z \text{ majorant de } A\Rightarrow M\Re z\end{cases}$$

Caractérisation du sup/inf pour un ORDRE TOTAL : E ensemble muni d'un ordre total $\leq$

On notera : $\forall(x,y)\in E^2$, $(x<y)\Leftrightarrow(x\leq y)$ ET $(x\neq y)$

$$A\in E, M\in E. \text{ On a : } M=\sup(A)\Leftrightarrow\begin{cases}M \text{ majorant de } A\\ \forall z\in E,\ (z<M)\Rightarrow(\exists x\in A, z<x)\end{cases}$$

(pour un ordre total, on peut toujours trouver un élément de $A\neq z$ entre $z\in A$ et sa borne sup)